

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 8 класса**

2023/24 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Тополь растёт вдвое быстрее, чем клён. Известно, что сейчас клён в 3 раза выше тополя. Через 6 лет клён будет вдвое выше, чем тополь. Через сколько лет, считая от сегодняшнего дня, они сравняются в росте?

Ответ: 36

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Пусть высота клёна $3y$ ед., тополя — y ед. Пусть скорость роста тополя $2x$ ед./год, клёна — x ед./год. Тогда $(3y + 6x) : (y + 12x) = 2$, откуда $y = 18x$. Обозначим количество лет, через которое, считая от сегодняшнего дня, они сравняются в росте через k . Тогда получим $(3y + kx) : (y + 2kx) = 1$, откуда $k = 36$.

Задание № 1.2

Условие:

Берёза растёт в 3 раза быстрее, чем дуб. Известно, что сейчас дуб в 3 раза выше берёзы. Через 5 лет дуб будет вдвое выше, чем берёза. Через сколько лет, считая от сегодняшнего дня, они сравняются в росте?

Ответ: 25

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Сосна растёт в 4 раза быстрее, чем ель. Известно, что сейчас ель в 3 раза выше сосны. Через 6 лет ель будет вдвое выше, чем сосна. Через сколько лет, считая от сегодняшнего дня, они сравняются в росте?

Ответ: 28

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Сосна растёт в 3 раза быстрее, чем клён. Известно, что сейчас клён в 4 раза выше сосны. Через 2 года клён будет в 3 раза выше, чем сосна. Через сколько лет, считая от сегодняшнего дня, они сравняются в росте?

Ответ: 24

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Баба-Яга учит своего Кота готовить зелье. Для приготовления зелья нужно взять 20 граммов экстракта из пиявок и смешать его с водой. Баба-Яга и Кот взяли для своих зелий одинаковое количество воды, но Кот по неосторожности расплескал часть своей воды, пока наливал её в экстракт пиявок. Из-за этого у Кота получился раствор с концентрацией 10 %, в то время как у Бабы-Яги вышел раствор с концентрацией 8 %. Сколько граммов воды расплескал Кот?

Ответ: 50

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Баба-Яга, которая не расплескала воду, получила раствор с концентрацией 8 %. Поскольку она взяла 20 граммов экстракта из пиявок, то эти 20 граммов как раз и составляют 8 % от массы раствора. А значит, сам раствор, который она получила, имеет массу $20 \cdot 100 \% : 8 \% = 250$ граммов, и взяла она для этого раствора $250 - 20 = 230$ граммов воды. У Кота же получился раствор с концентрацией 10 %, и он взял такое же количество экстракта — 20 граммов. Значит, в его растворе 20 граммов составляют 10 % от всей массы раствора. А значит, весь раствор имеет массу $20 \cdot 100 \% : 10 \% = 200$ граммов, и ему понадобилось для этого раствора $200 - 20 = 180$ граммов воды. А поскольку брал он столько же воды, сколько и Баба-Яга, то есть 230 граммов, то получаем, что $230 - 180 = 50$ граммов воды он расплескал.

Задание № 2.2

Условие:

Баба-Яга учит своего Кота готовить зелье. Для приготовления зелья нужно взять 20 граммов экстракта из пиявок и смешать его с водой. Баба-Яга и Кот взяли для своих зелий одинаковое количество воды, но Кот по неосторожности расплескал часть своей воды, пока наливал её в экстракт пиявок. Из-за этого у Кота получился раствор с концентрацией 5 %, в то время как у Бабы-Яги вышел раствор с концентрацией 4 %. Сколько граммов воды расплескал Кот?

Ответ: 100

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Баба-Яга учит своего Кота готовить зелье. Для приготовления зелья нужно взять 20 граммов экстракта из пиявок и смешать его с водой. Баба-Яга и Кот взяли для своих зелий одинаковое количество воды, но Кот по неосторожности расплескал часть своей воды, пока наливал её в экстракт пиявок. Из-за этого у Кота получился раствор с концентрацией 8 %, в то время как у Бабы-Яги вышел раствор с концентрацией 5 %. Сколько граммов воды расплескал Кот?

Ответ: 150

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Баба-Яга учит своего Кота готовить зелье. Для приготовления зелья нужно взять 20 граммов экстракта из пиявок и смешать его с водой. Баба-Яга и Кот взяли для своих зелий одинаковое количество воды, но Кот по неосторожности расплескал часть своей воды, пока наливал её в экстракт пиявок. Из-за этого у Кота получился раствор с концентрацией 16 %, в то время как у Бабы-Яги вышел раствор с концентрацией 10 %. Сколько граммов воды расплескал Кот?

Ответ: 75

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 2.1

Задание № 3.1

Условие:

В треугольнике ABC провели медиану BM и биссектрису BK (точка M лежит между точками K и C). Оказалось, что треугольники ABK и BKM — равнобедренные с основаниями AB и BM соответственно. Найдите угол ABM . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Пусть $\angle KBM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$. Тогда по теореме о внешнем угле $\angle BCA = \alpha - \beta$. Так как треугольник ABK — равнобедренный с основанием AB , и BK — биссектриса треугольника ABC , то $\angle BAC = \alpha + \beta$. В треугольнике ABC имеем: $\alpha + \beta + \alpha + \beta + \alpha + \beta + \alpha - \beta = 180^\circ$, откуда $\angle ABM = 2\alpha + \beta = 90^\circ$.

Задание № 3.2

Условие:

В треугольнике ABC провели медиану BM и биссектрису BK (точка K лежит между точками M и C). Оказалось, что треугольники CBK и BKM — равнобедренные с основаниями BC и BM соответственно. Найдите угол MBC . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 3.1

Задание № 3.3

Условие:

В треугольнике ABC провели медиану BM и биссектрису BK (точка M лежит между точками K и C). Оказалось, что треугольники ABK и BKM — равнобедренные с основаниями AB и BM соответственно. Найдите сумму углов BAM и BMA . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 3.1

Задание № 3.4

Условие:

В треугольнике ABC провели медиану BM и биссектрису BK (точка K лежит между точками M и C). Оказалось, что треугольники CBK и BKM — равнобедренные с основаниями BC и BM соответственно. Найдите сумму углов BMK и BSK . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Каждая уважающая себя кошка должна ежедневно выполнять следующие действия:

- Поспать на хозяйском диване;
- Съесть курицу со стола;
- Громко помяукать, чтобы все соседи её услышали;
- Поточить когти о хозяйский диван;
- Разбить вазу или кружку;
- Поохотиться за своим хвостом;
- Попить воду из крана.

Для уважающей себя кошки Анфисы неважен порядок этих действий. Тем не менее, выполнить два действия с хозяйским диваном (лечь на него спать и поточить об него когти) она хочет подряд, при этом ей неважно, что из этого она сделает первым, а что — вторым. Сколькими способами кошка Анфиса сможет составить своё расписание дел на день, если каждое из перечисленных действий она хочет выполнить ровно один раз?

Ответ: 1440

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Всего Анфисе нужно выполнить семь перечисленных выше действий в любом порядке, но два из этих действий (поточить когти о хозяйский диван и поспать на этом диване) она хотела бы выполнить подряд. Тогда можно считать, что для Анфисы это одно большое действие — «поточить когти о хозяйский диван и лечь на него спать». В таком случае у Анфисы есть всего шесть действий, которые ей нужно выполнить, и уже нет никаких ограничений на их порядок. Всего способов составить расписание из шести действий — 720 (сначала

Анфиса выполняет какое-то из шести действий, потом — какое-то из пяти оставшихся, затем — какое-то из четырёх оставшихся и так далее, в конце она выполняет последнее оставшееся ей действие; то есть всего $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ способов). Теперь заметим, что в каждом из этих 720 способов у неё есть два варианта — сначала поточить когти, потом лечь спать, или наоборот. Таким образом, для получения окончательного ответа надо 720 умножить на 2.

Задание № 4.2

Условие:

Каждая уважающая себя кошка должна каждый день выполнять следующие действия:

- Поспать на хозяйском диване;
- Съесть курицу со стола;
- Громко помяукать, чтобы все соседи её услышали;
- Поточить когти о хозяйский диван;
- Разбить вазу или кружку;
- Поохотиться за своим хвостом;
- Попить воду из крана.

Для уважающей себя кошки Матильды неважен порядок этих действий. Тем не менее, она хочет громко помяукать раньше, чем попить воду (ей необязательно делать эти действия подряд). Сколькими способами кошка Матильда сможет составить своё расписание дел на день, если каждое из перечисленных действий она хочет выполнить ровно один раз?

Ответ: 2520

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Каждый уважающий себя паук должен каждый день выполнять следующие действия:

- Напугать хозяйку дома, пока она будет собираться на работу;
- Напугать её дочку, пока она будет собираться в школу;
- Жутко пошуршать в углу, чтобы напугать кошку;
- Убежать от веника или тряпки;
- Сплести паутину на кухне;
- Упасть в кошачью миску и выбраться из неё.

Для уважающего себя паука Аркадия неважен порядок этих действий, но он хотел бы напугать кошку за один день два раза (не обязательно подряд). Сколькими способами паук Аркадий сможет составить своё расписание дел на день, если все остальные действия он хочет выполнить ровно по одному разу?

Ответ: 2520

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Каждый уважающий себя паук должен каждый день выполнять следующие действия:

- Напугать хозяйку дома, пока она будет собираться на работу;
- Напугать её дочку, пока она будет собираться в школу;
- Жутко пошуршать в углу, чтобы напугать кошку;
- Убежать от веника или тряпки;
- Сплести паутину на кухне;
- Упасть в кошачью миску и выбраться из неё.

Для уважающего себя паука Филимона неважен порядок этих действий, но пугать всех членов семьи, включая кошку, ему хотелось бы подряд (неважно, в каком порядке он будет их пугать, главное, чтобы они пугались подряд). Сколькими способами паук Филимон сможет составить своё расписание дел на день, если каждое из перечисленных действий он хочет выполнить ровно один раз?

Ответ: 144

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Найдите наименьшее значение выражения

$$10y^2 - 6xy - 8y + x^2 + 19.$$

Числа x и y принимают любые действительные значения.

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Заметим, что указанное выражение можно представить в виде суммы

$$9y^2 - 6xy + x^2 + y^2 - 8y + 16 + 3 = (3y - x)^2 + (y - 4)^2 + 3 \geq 3.$$

То есть наименьшее значение равно 3, оно достигается при $y = 4$, $x = 12$.

Задание № 5.2

Условие:

Найдите наименьшее значение выражения

$$4y^2 - 4xy + 2x^2 - 6x + 11.$$

Числа x и y принимают любые действительные значения.

Ответ: 2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Найдите наибольшее значение выражения

$$-5y^2 + 4xy + 6y - x^2 - 5.$$

Числа x и y принимают любые действительные значения.

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Найдите наибольшее значение выражения

$$-4y^2 + 4xy - 2x^2 + 2x + 10.$$

Числа x и y принимают любые действительные значения.

Ответ: 11

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 5.1

Задание № 6.1

Условие:

Незнайка из пятизначного числа вычитает сумму его цифр и делит полученную разность на 3. Какое число у него могло получиться? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☐ 3210
- ☐ 15113
- ☒ 33309
- ☐ 99306

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Пусть у Незнайки было число $abcde$. Тогда после вычитания суммы цифр числа останется сумма $9999a + 999b + 99c + 9d$. После деления на 3 получается сумма $3333a + 333b + 33c + 3d$. Значит, полученное число должно делиться на 3, а 15113 не делится на 3. При этом наибольшее значение суммы $3333a + 333b + 33c + 3d$ равно 33318 (при $a = b = c = d = 9$), это значит, что 99306 отпадает. Кроме того, $3333a + 333b + 33c + 3d > 3210$, так как цифра a хотя бы 1. На 33309 есть пример: $a = 9, b = 9, c = 9, d = 6$.

Задание № 6.2

Условие:

Незнайка из пятизначного числа вычитает сумму его цифр и делит полученную разность на 3. Какое число у него могло получиться? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☐ 3240
- ☐ 15203
- ☒ 33300
- ☐ 96306

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 6.1

Задание № 6.3

Условие:

Незнайка из пятизначного числа вычитает сумму его цифр и делит полученную разность на 3. Какое число у него могло получиться? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☐ 2463
- ☐ 25103
- ☒ 32319
- ☐ 86304

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 6.1

Задание № 6.4

Условие:

Незнайка из пятизначного числа вычитает сумму его цифр и делит полученную разность на 3. Какое число у него могло получиться? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ☐ 3330
- ☐ 15103
- ☒ 33306
- ☐ 46304

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 6.1

Задание № 7.1

Условие:

По периметру круглого пруда через равные интервалы растут 15 кувшинок. На одной из них сидит лягушка. Иногда ей кажется, будто к пруду подходит цапля, и тогда она испуганно квакает и начинает прыгать по часовой стрелке, делая либо 5, либо 6 прыжков. Все прыжки — одинаковые, и одним прыжком лягушка перемещается ровно на ближайшую по часовой стрелке кувшинку. После первого квакания лягушка сделала 5 прыжков, а после второго — 6 прыжков. Через какое ещё наименьшее число кваканий лягушка могла оказаться на той кувшинке, на которой она сидела изначально?

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Чтобы лягушка оказалась на том же месте, на котором она сидела изначально, она должна пропрыгать некоторое количество полных кругов. Один полный круг — это 15 прыжков по часовой стрелке (поскольку вокруг пруда всего 15 лягушек). Значит, лягушка должна сделать $15n$ прыжков, где n — натуральное число (то есть её суммарное количество прыжков должно быть кратно 15). Поскольку мы знаем из условия, что она хотя бы один раз делала 5 прыжков и хотя бы один раз делала 6 прыжков, то можем считать, что всего она должна сделать $5a + 6b$ прыжков, где a и b — натуральные числа. Таким образом, мы получаем уравнение $5a + 6b = 15n$, и нам нужно найти наименьшее возможное значение $a + b$ (это и есть наименьшее возможное число сигналов, которые нужны для возвращения на исходные места). Заметим, что правая часть уравнения кратна 15, а значит, она кратна 3 и кратна 5. Тогда и левая часть уравнения должна быть кратна 3 и кратна 5. А значит, $5a$ должно быть кратно

3 (поскольку $6b$ кратно 3), и тогда a — это хотя бы 3 (так как a — натуральное число). По аналогии, $6b$ должно быть кратно 5 (поскольку $5a$ кратно 5), и тогда b — это хотя бы 5. Подставляя $a = 3$ и $b = 5$, получаем: $5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = 15 + 30 = 45 = 15 \cdot 3$. Значит, числа $a = 3$ и $b = 5$ нам подходят, и наименьшая возможная сумма $a + b = 3 + 5 = 8$. Это и есть наименьшее число кваканий, которое необходимо для возвращения лягушки на исходное место. Но поскольку два сигнала уже были даны, а нас просят найти, сколько ещё сигналов нужно, то ответ — это $8 - 2 = 6$ кваканий.

Задание № 7.2

Условие:

По периметру круглого пруда через равные интервалы растут 12 кувшинок. На одной из них сидит лягушка. Иногда ей кажется, будто к пруду подходит цапля, и тогда она испуганно квакает и начинает прыгать по часовой стрелке, делая либо 8, либо 9 прыжков. Все прыжки — одинаковые, и одним прыжком лягушка перемещается ровно на ближайшую по часовой стрелке кувшинку. После первого квакания лягушка сделала 8 прыжков, а после второго — 9 прыжков. Через какое ещё наименьшее число кваканий лягушка могла оказаться на той кувшинке, на которой она сидела изначально?

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 7.1

Задание № 7.3

Условие:

По периметру круглого пруда через равные интервалы растут 20 кувшинок. На одной из них сидит лягушка. Иногда ей кажется, будто к пруду подходит цапля, и тогда она испуганно квакает и начинает прыгать по часовой стрелке, делая либо 15, либо 16 прыжков. Все прыжки — одинаковые, и одним прыжком лягушка перемещается ровно на ближайшую по часовой стрелке кувшинку. После первого квакания лягушка сделала 15 прыжков, а после второго — 16 прыжков. Через какое ещё наименьшее число кваканий лягушка могла оказаться на той кувшинке, на которой она сидела изначально?

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 7.1

Задание № 7.4

Условие:

По периметру круглого пруда через равные интервалы растёт 21 кувшинка. На одной из них сидит лягушка. Иногда ей кажется, будто к пруду подходит цапля, и тогда она испуганно квакает и начинает прыгать по часовой стрелке, делая либо 6, либо 7 прыжков. Все прыжки — одинаковые, и одним прыжком лягушка перемещается ровно на ближайшую по часовой стрелке кувшинку. После первого квакания лягушка сделала 6 прыжков, а после второго — 7 прыжков. Через какое ещё наименьшее число кваканий лягушка могла оказаться на той кувшинке, на которой она сидела изначально?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Дан треугольник ABC , в котором угол $A = 40^\circ$, угол $B = 80^\circ$. На стороне BA от точки B отложили отрезок BM , равный BC , а на стороне CA от точки C отложили отрезок CK , равный BC . Найдите угол CMK . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 30

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Проведем BK . Тогда треугольник BKC — равносторонний. Значит, $BK = BC$. Тогда треугольник BKM — равнобедренный с углами по 80° при основании, а BMC — равнобедренный с углами по 50° при основании. Следовательно, угол $KMC = 30^\circ$.

Задание № 8.2

Условие:

Дан треугольник ABC , в котором угол $A = 50^\circ$, угол $B = 70^\circ$. На стороне BA от точки B отложили отрезок BM , равный BC , а на стороне CA от точки C отложили отрезок CK , равный BC . Найдите угол CKM . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 145

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Дан треугольник ABC , в котором угол $A = 20^\circ$, угол $B = 100^\circ$. На стороне BA от точки B отложили отрезок BM , равный BC , а на стороне CA от точки C отложили отрезок CK , равный BC . Найдите угол CKM . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 130

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Дан треугольник ABC , в котором угол $A = 10^\circ$, угол $B = 110^\circ$. На стороне BA от точки B отложили отрезок BM , равный BC , а на стороне CA от точки C отложили отрезок CK , равный BC . Найдите угол CKM . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 125.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием № 8.1