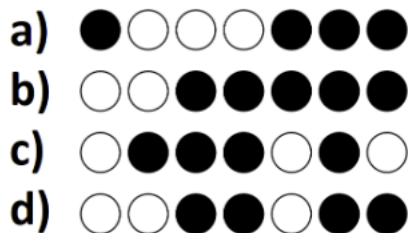


Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса, 2023–2024 учебный год

1. Два велосипедиста Петя и Вася ездят по круговой дорожке длиной 600 метров. Петя и Вася едут по дорожке в одном направлении с постоянными скоростями. Петя обогнал Васю в 11:04, а в следующий раз — в 11:12. Какое расстояние (по дорожке) было между Петей и Васей в 11:02? Укажите меньшее из двух чисел, ответ выразите в метрах.

Ответ. 150 **Решение.** За $12 - 4 = 8$ минут Петя проезжает на один круг больше Васи. За время между 11:02 и 11:04 Петя проедет на четверть круга больше. Тогда расстояние от Васи до Пети, по ходу движения, равно $600 : 4 = 150$ метров, а от Пети до Васи, по ходу движения, — $600 - 150 = 450$ метров. Меньшее из них равно 150 метров.

2. Валентин выкладывает в ряд 7 фишек. Фишки чёрные с одной стороны и белые с другой. Вначале все фишки лежат чёрной стороной вверх. За один ход Валентин выбирает и переворачивает одну фишку и все фишки слева от неё. Какие из следующих ситуаций возможны ровно через три хода?



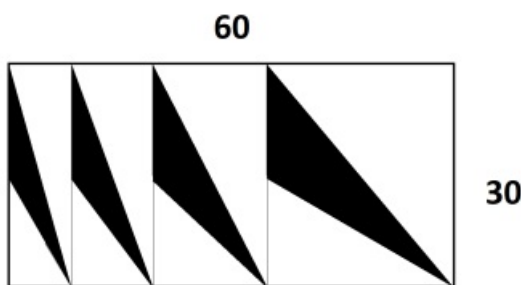
Ответ. b), d). **Решение.** (a) Заметим, что каждый ход переворачивается самая левая фишка. Тогда через три хода она должна быть белой, а здесь — чёрная.

(b) Можно получить выбрав три раза вторую слева фишку.

(c) В примере есть пять пар соседних разноцветных фишек. За один ход количество таких пар изменится не более чем на один: на стыке между выбранной фишкой и ближайшей к ней справа (если она есть). Значит, за три хода можно получить не более трех таких пар. Поэтому такое расположение фишек невозможно.

(d) Можно получить выбрав по очереди вторую, четвертую и пятую слева фишки.

3. Для своего арт-проекта Иван разделил белый холст размером 30×60 см на прямоугольные области, как показано на рисунке, и нарисовал в каждой области чёрный треугольник. Крайняя левая сторона каждого чёрного треугольника составляет ровно 15 см. Найдите площадь части холста, оставшуюся белой. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ. 1350. **Решение.** «Верхняя» сторона каждого чёрного треугольника является диагональю в соответствующем прямоугольнике и, поэтому, делит его на два равных треугольника; кроме того, площадь чёрного треугольника равна половине площади каждого из этих треугольников, ведь «нижняя» сторона чёрного треугольника делит вертикальную сторону прямоугольника пополам. Следовательно, в каждом прямоугольнике площадь закрашенной части составляет четверть всей площади. Поэтому незакрашенная часть имеет площадь $\frac{3}{4} \cdot 30 \cdot 60 = 1350$.

4. В мешочке лежат карточки, на которых написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке написано ровно одно число, каждое число от 1 до 200 написано ровно на одной карточке. Андрей и Борис по очереди вытягивают карточки одну за другой, пока мешочек не опустеет. В конце каждый из них складывает числа на своих карточках. Первое число, вытянутое Андреем, равно 3, а Борисом — 170. На какое наибольшее число сумма Андрея может быть больше суммы Бориса?

Ответ. 9666. **Решение.** Наибольшая сумма, которую мог набрать Андрей, равна $(101 + 102 + \dots + 200) - 170 + 3$. Наименьшая сумма, которую мог набрать Борис, равна $(1 + 2 + \dots + 100) + 170 - 3$. Их разница равна

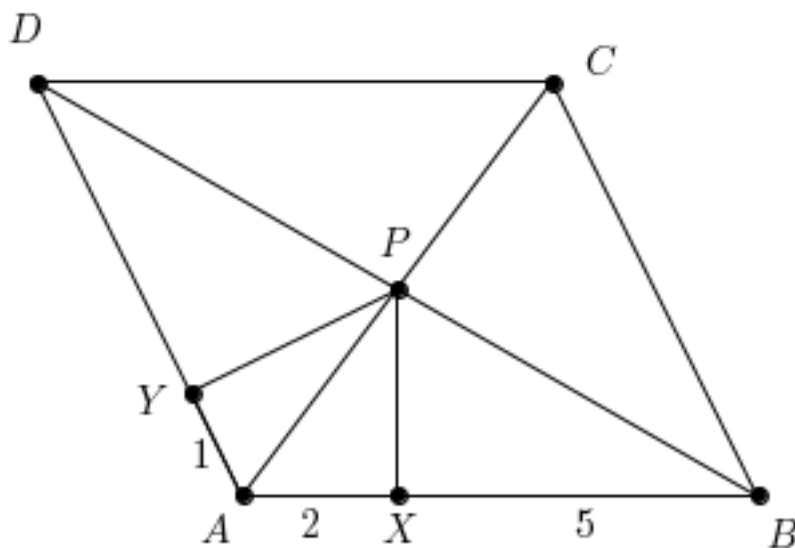
$$((101+102+\dots+200)-170+3)-((1+2+\dots+100)+170-3) = (101-1)+(102-2)+\dots+(200-100)-2\cdot(170-3) = 100\cdot 100 - 2\cdot 167 = 9666.$$

5. На доске записано 89 различных натуральных чисел. Ровно 77 из них делятся на 9 и ровно 54 — на 21. Какое наименьшее значение может быть у самого большого из этих 89 чисел?

Ответ. 2646. **Решение.** *Оценка.* Чисел, не кратных 9, ровно $89 - 77 = 12$, а не кратных 21 — ровно $89 - 54 = 35$. Поэтому чисел, которые не делятся хотя бы на одно из чисел 9 и 21 (т.е. кратных 63), не больше $12 + 35 = 47$. Значит чисел, кратных и 9, и 21 не меньше $89 - 47 = 42$. Так как числа различны, то наибольшее из чисел, кратных 63, не меньше $42 \cdot 63 = 2646$.

Пример. 42 числа вида $63k$, где $1 \leq k \leq 42$, 77 — 42 = 35 чисел вида $63k + 9$, где $1 \leq k \leq 35$, 54 — 42 = 12 чисел вида $63k + 21$, где $1 \leq k \leq 12$. Несложно заметить, что числа из второй группы делятся на 9 и не делятся на 21. Числа третьей группы — наоборот — не делятся на 9, но делятся на 21.

6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка X — основание перпендикуляра из P на отрезок AB , а точка Y — основание перпендикуляра из P на отрезок AD . Известно, что $AX = 2$, $BX = 5$, $AY = 1$. Найдите DY^2 .



Ответ. $DY^2 = 21$. **Решение.** Запишем утверждение теоремы Пифагора для треугольников AXP и AYP :

$$2^2 + PX^2 = AP^2 = 1^2 + PY^2,$$

откуда $PX^2 - PY^2 = 1^2 - 2^2$. Также запишем теорему Пифагора для треугольников BPX и DPY :

$$5^2 + PX^2 = PB^2 = PD^2 = PY^2 + DY^2.$$

Тогда $DY^2 = 5^2 + PX^2 - PY^2 = 5^2 + 1^2 - 2^2 = 22$.

7. Для каких натуральных n выполнено неравенство $2^{390} < n^n < 3^{320}$? В ответ запишите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать n .

Ответ. Наименьшее $n = 65$, наибольшее $n = 80$. **Решение.** Заметим, что $2^{390} = 64^{65}$. Из этого следует, что $64^{65} < 2^{390} < 65^{65}$. Значит, наименьшее n , которое подходит, равно 65. С другой стороны, $3^{320} = 81^{80}$, откуда $80^{80} < 3^{320} < 81^{81}$. Значит, наибольшее подходящее n равняется 80.

8. Команды Науки, Спорта и Искусства договорились весь день играть в волейбол. В каждый момент времени одна команда отдыхает, а две другие играют между собой. Когда какая-то команда проигрывает, она садится отдыхать, а отдохавшая команда играет партию с победившей. Первыми играют команды Науки и Спорта. В конце дня оказалось, что команда Спорта выиграла 22 раза, а команда Науки — 17. Сколько раз могли встречались команды Науки и Спорта?

Ответ. 20. **Решение.** Заметим, что в каждой партии, где играли команды Науки и Спорта, выиграла одна из этих команд. Рассмотрим только партии, где выигрывали команды или Науки, или Спорта. Докажем, что среди двух последовательных таких партий ровно одна будет партией между Наукой и Спортом:

- если в первой партии играют команды Наука и Спорт, то одна из них садится отдыхать и дальше играет команда Искусства до тех пор, пока кто-то из команд Науки или Спорта у неё не выиграет;
- если в первой партии играет команда Искусства, то она должна проиграть (мы рассматриваем только те партии, где выигрывает команда или Науки, или Спорта), а следующая партия — между командами Науки и Спорта.

. Самая первая партия, где выиграла или Наука, или Спорт — это просто самая первая партия. Разобьём оставшиеся $22 + 17 - 1 = 38$ партий на пары последовательных. В каждой из них, по доказанному, ровно в одной партии играли Наука и Спорт, откуда ответ $1 + \frac{38}{2} = 20$.

Информация о вариантах

1-1. Два велосипедиста Петя и Вася ездят по круговой дорожке длиной 600 метров. Петя и Вася едут по дорожке в одном направлении с постоянными скоростями. Петя обогнал Васю в 11:04, а в следующий раз — в 11:12. Какое расстояние (по дорожке) было между Петей и Васей в 11:02? Укажите меньшее из двух чисел, ответ выразите в метрах.

Ответ. 150.

1-2. Два велосипедиста Петя и Вася ездят по круговой дорожке длиной 600 метров. Петя и Вася едут по дорожке в одном направлении с постоянными скоростями. Петя обогнал Васю в 12:05, а в следующий раз — в 12:14. Какое расстояние (по дорожке) было между Петей и Васей в 12:02? Укажите меньшее из двух чисел, ответ выразите в метрах.

Ответ. 200.

1-3. Два велосипедиста Петя и Вася ездят по круговой дорожке длиной 400 метров. Петя и Вася едут по дорожке в одном направлении с постоянными скоростями. Петя обогнал Васю в 13:06, а в следующий раз — в 13:14. Какое расстояние (по дорожке) было между Петей и Васей в 13:04? Укажите меньшее из двух чисел, ответ выразите в метрах.

Ответ. 100.

1-4. Два велосипедиста Петя и Вася ездят по круговой дорожке длиной 500 метров. Петя и Вася едут по дорожке в одном направлении с постоянными скоростями. Петя обогнал Васю в 10:07, а в следующий раз — в 10:17. Какое расстояние (по дорожке) было между Петей и Васей в 10:05? Укажите меньшее из двух чисел, ответ выразите в метрах.

Ответ. 100.

2-1. Валентин выкладывает в ряд 7 фишек. Фишки чёрные с одной стороны и белые с другой. Вначале все фишки лежат чёрной стороной вверх. За один ход Валентин выбирает и переворачивает одну фишку и все фишки слева от неё. Какие из следующих ситуаций возможны ровно через три хода?

- a) ● ○ ○ ○ ● ● ●
- b) ○ ○ ● ● ● ● ●
- c) ○ ● ● ● ○ ● ○
- d) ○ ○ ● ● ○ ● ●

Ответы. b) и d).

2-2. Валентин выкладывает в ряд 7 фишек. Фишки чёрные с одной стороны и белые с другой. Вначале все фишки лежат чёрной стороной вверх. За один ход Валентин выбирает и переворачивает одну фишку и все фишки слева от неё. Какие из следующих ситуаций возможны ровно через три хода?

- a) ● ○ ● ○ ○ ● ●
- b) ○ ○ ○ ○ ● ● ●
- c) ○ ● ● ● ● ● ○
- d) ○ ○ ● ○ ○ ● ●

Ответы. b), c) и d).

2-3. Валентин выкладывает в ряд 7 фишек. Фишки чёрные с одной стороны и белые с другой. Вначале все фишки лежат чёрной стороной вверх. За один ход Валентин выбирает и переворачивает одну фишку и все фишки слева от неё. Какие из следующих ситуаций возможны ровно через три хода?

- a) ○ ○ ● ○ ○ ● ●
b) ● ● ● ○ ● ○ ●
c) ○ ○ ○ ○ ● ● ●
d) ● ● ○ ○ ○ ● ●

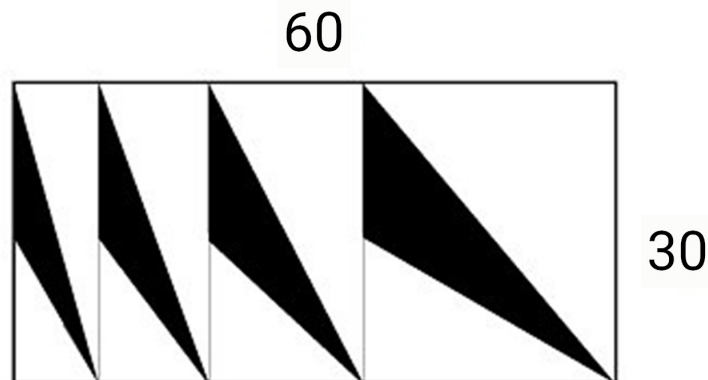
Ответы. a) и c).

2-4. Валентин выкладывает в ряд 7 фишек. Фишки чёрные с одной стороны и белые с другой. Вначале все фишки лежат чёрной стороной вверх. За один ход Валентин выбирает и переворачивает одну фишку и все фишки слева от неё. Какие из следующих ситуаций возможны ровно через три хода?

- a) ● ○ ○ ● ● ● ●
b) ○ ○ ○ ● ● ● ●
c) ○ ● ● ● ● ● ○
d) ● ○ ○ ● ○ ● ●

Ответы. b) и c).

3-1. Для своего арт-проекта Иван разделил белый холст размером 30×60 см на прямоугольные области, как показано на рисунке, и нарисовал в каждой области чёрный треугольник. Крайняя левая сторона каждого чёрного треугольника составляет ровно 15 см. Найдите площадь части холста, оставшуюся белой. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



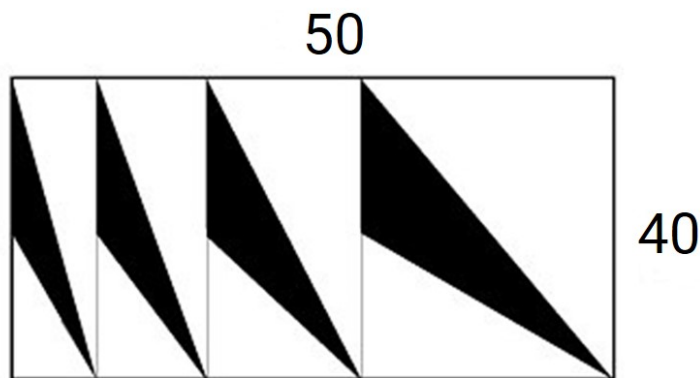
Ответ. 1350.

3-2. Для своего арт-проекта Иван разделил белый холст размером 20×50 см на прямоугольные области, как показано на рисунке, и нарисовал в каждой области чёрный треугольник. Крайняя левая сторона каждого чёрного треугольника составляет ровно 10 см. Найдите площадь части холста, оставшуюся белой. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



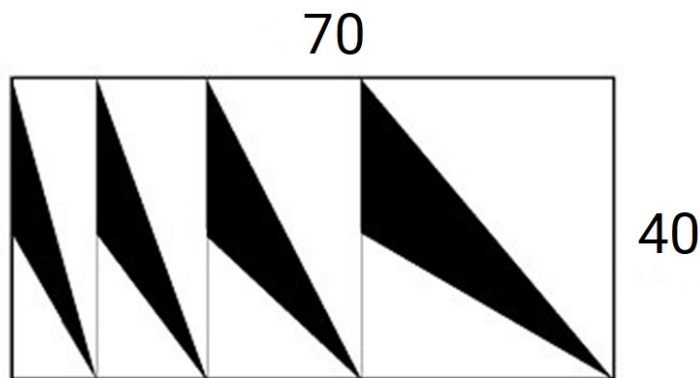
Ответ. 750.

3-3. Для своего арт-проекта Иван разделил белый холст размером 40×50 см на прямоугольные области, как показано на рисунке, и нарисовал в каждой области чёрный треугольник. Крайняя левая сторона каждого чёрного треугольника составляет ровно 20 см. Найдите площадь части холста, оставшуюся белой. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ. 1500.

3-4. Для своего арт-проекта Иван разделил белый холст размером 40×70 см на прямоугольные области, как показано на рисунке, и нарисовал в каждой области чёрный треугольник. Крайняя левая сторона каждого чёрного треугольника составляет ровно 20 см. Найдите площадь части холста, оставшуюся белой. Ответ выразите в квадратных сантиметрах.



Ответ. 2100.

4-1. В мешочке лежат карточки, на которых написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке написано ровно одно число, каждое число от 1 до 200 написано ровно на одной карточке. Андрей и Борис по очереди вытягивают карточки одну за другой, пока мешочек не опустеет. В конце каждый из них складывает числа на своих карточках. Первое число, вытянутое Андреем, равно 3, а Борисом — 170. На какое наибольшее число сумма Андрея может быть больше суммы Бориса?

Ответ. 9666.

4-2. В мешочке лежат карточки, на которых написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке написано ровно одно число, каждое число от 1 до 200 написано ровно на одной карточке. Андрей и Борис по очереди вытягивают карточки одну за другой, пока мешочек не опустеет. В конце каждый из них складывает числа на своих карточках. Первое число, вытянутое Андреем, равно 7, а Борисом — 160. На какое наибольшее число сумма Андрея может быть больше суммы Бориса?

Ответ. 9694.

4-3. В мешочке лежат карточки, на которых написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке написано ровно одно число, каждое число от 1 до 200 написано ровно на одной карточке. Андрей и Борис по очереди вытягивают карточки одну за другой, пока мешочек не опустеет. В конце каждый из них складывает числа на своих карточках. Первое число, вытянутое Андреем, равно 14, а Борисом — 180. На какое наибольшее число сумма Андрея может быть больше суммы Бориса?

Ответ. 9668.

4-4. В мешочке лежат карточки, на которых написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке написано ровно одно число, каждое число от 1 до 200 написано ровно на одной карточке. Андрей и Борис по очереди

вытягивают карточки одну за другой, пока мешочек не опустеет. В конце каждый из них складывает числа на своих карточках. Первое число, вытянутое Андреем, равно 12, а Борисом — 160. На какое наибольшее число сумма Андрея может быть больше суммы Бориса?

Ответ. 9704.

5-1. На доске записано 89 различных натуральных чисел. Ровно 77 из них делятся на 9 и ровно 54 — на 21. Какое наименьшее значение может быть у самого большого из этих 89 чисел?

Ответ. 2646.

5-2. На доске записано 91 различных натуральных чисел. Ровно 73 из них делятся на 9 и ровно 55 — на 15. Какое наименьшее значение может быть у самого большого из этих 91 числа?

Ответ. 1665.

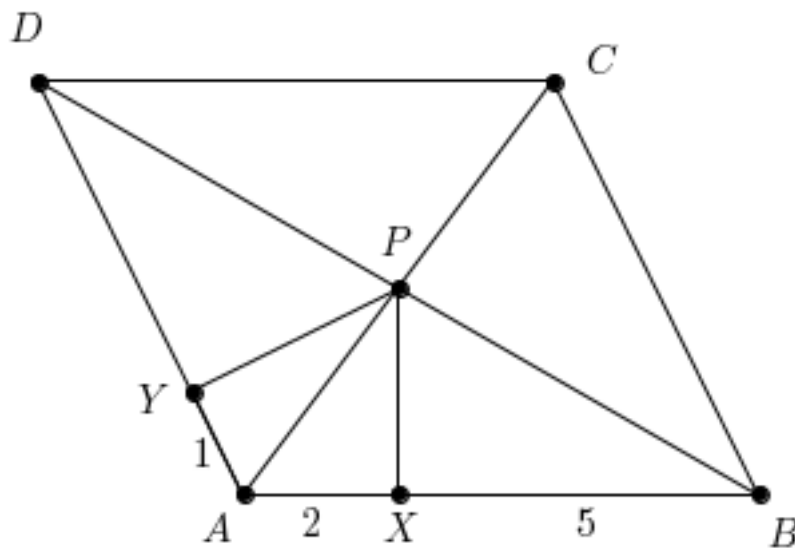
5-3. На доске записано 87 различных натуральных чисел. Ровно 78 из них делятся на 15 и ровно 54 — на 25. Какое наименьшее значение может быть у самого большого из этих 87 чисел?

Ответ. 3375.

5-4. На доске записано 83 различных натуральных чисел. Ровно 75 из них делятся на 35 и ровно 53 — на 25. Какое наименьшее значение может быть у самого большого из этих 83 чисел?

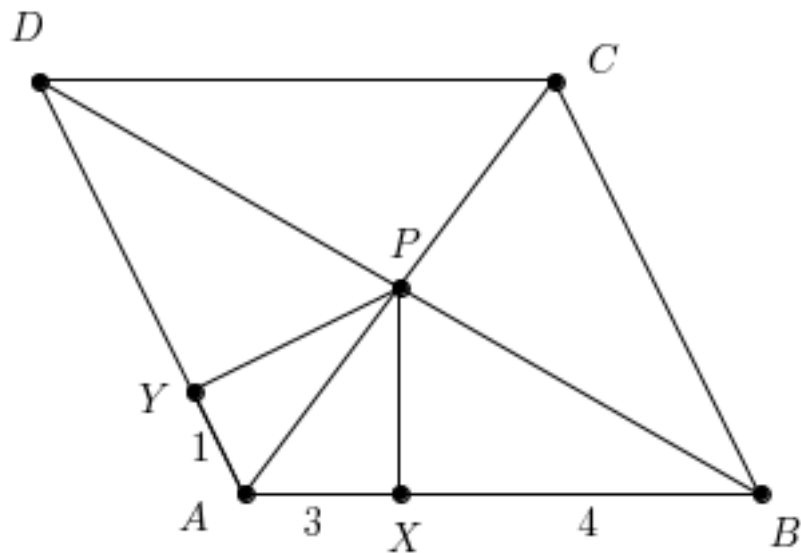
Ответ. 7875.

6-1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка X — основание перпендикуляра из P на отрезок AB , а точка Y — основание перпендикуляра из P на отрезок AD . Известно, что $AX = 2$, $BX = 5$, $AY = 1$. Найдите DY^2 .



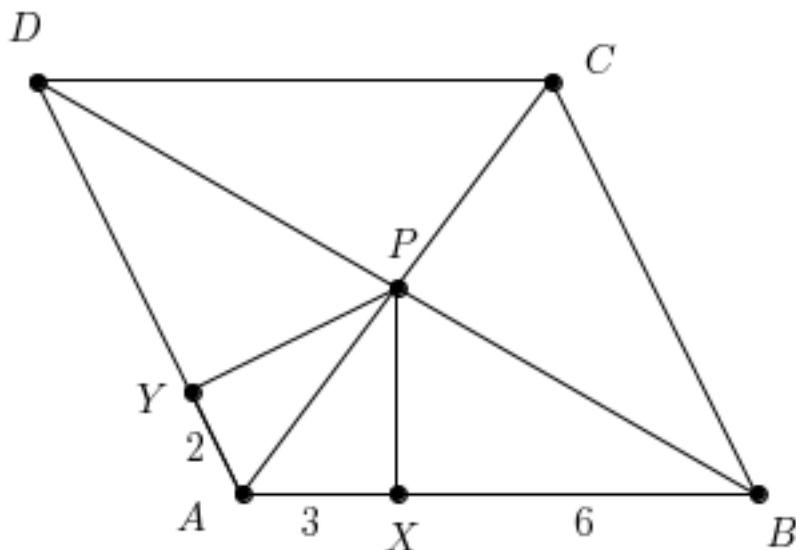
Ответ. 22.

6-2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка X — основание перпендикуляра из P на отрезок AB , а точка Y — основание перпендикуляра из P на отрезок AD . Известно, что $AX = 3$, $BX = 4$, $AY = 1$. Найдите DY^2 .



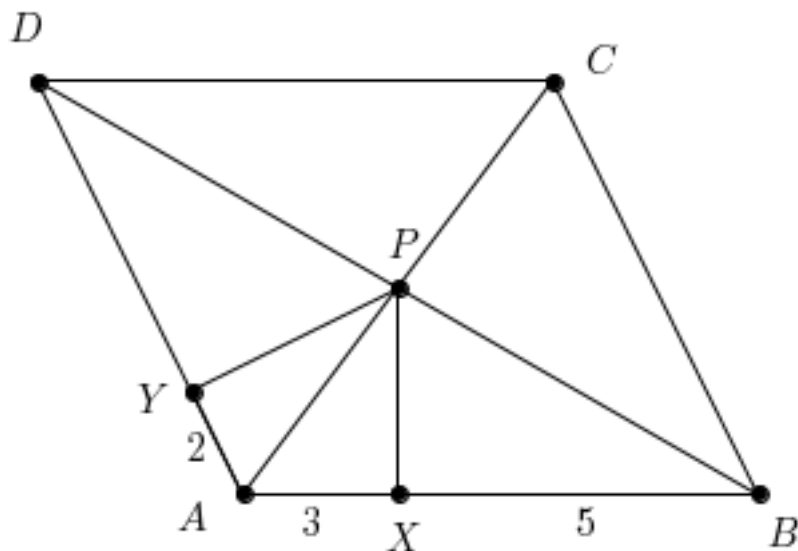
Ответ. 8.

6-3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка X — основание перпендикуляра из P на отрезок AB , а точка Y — основание перпендикуляра из P на отрезок AD . Известно, что $AX = 3$, $BX = 6$, $AY = 2$. Найдите DY^2 .



Ответ. 31.

6-4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка X — основание перпендикуляра из P на отрезок AB , а точка Y — основание перпендикуляра из P на отрезок AD . Известно, что $AX = 3$, $BX = 5$, $AY = 2$. Найдите DY^2 .



Ответ. 20.

7-1. Для каких натуральных n выполнено неравенство $2^{390} < n^n < 3^{320}$? В ответ запишите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать n .

Ответы. 65 и 80.

7-2. Для каких натуральных n выполнено неравенство $4^{195} < n^n < 6^{645}$? В ответ запишите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать n .

Ответы. 65 и 215.

7-3. Для каких натуральных n выполнено неравенство $7^{100} < n^n < 5^{378}$? В ответ запишите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать n .

Ответы. 50 и 125.

7-4. Для каких натуральных n выполнено неравенство $8^{130} < n^n < 5^{372}$? В ответ запишите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать n .

Ответы. 65 и 124.

8-1. Команды Науки, Спорта и Искусства договорились весь день играть в волейбол. В каждый момент времени одна команда отдыхает, а две другие играют между собой. Когда какая-то команда проигрывает, она садится отдыхать, а отдохавшая команда играет партию с победившей. Первыми играют команды Науки и Спорта. В конце дня оказалось, что команда Спорта выиграла 22 раза, а команда Науки — 17. Сколько раз могли встречались команды Науки и Спорта?

Ответ. 20.

8-2. Команды Науки, Спорта и Искусства договорились весь день играть в волейбол. В каждый момент времени одна команда отдыхает, а две другие играют между собой. Когда какая-то команда проигрывает, она садится отдыхать, а отдохавшая команда играет партию с победившей. Первыми играют команды Науки и Спорта. В конце дня оказалось, что команда Спорта выиграла 26 раз, а команда Науки — 19. Сколько раз могли встречались команды Науки и Спорта?

Ответ. 23.

8-3. Команды Науки, Спорта и Искусства договорились весь день играть в волейбол. В каждый момент времени одна команда отдыхает, а две другие играют между собой. Когда какая-то команда проигрывает, она садится отдыхать, а отдохавшая команда играет партию с победившей. Первыми играют команды Науки и Спорта. В конце дня оказалось, что команда Спорта выиграла 18 раз, а команда Науки — 13. Сколько раз могли встречались команды Науки и Спорта?

Ответ. 16.

8-4. Команды Науки, Спорта и Искусства договорились весь день играть в волейбол. В каждый момент времени одна команда отдыхает, а две другие играют между собой. Когда какая-то команда проигрывает, она садится отдыхать, а отдохавшая команда играет партию с победившей. Первыми играют команды Науки и Спорта. В конце дня оказалось, что команда Спорта выиграла 28 раз, а команда Науки — 21. Сколько раз могли встречались команды Науки и Спорта?

Ответ. 25.