Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	9
ШИФР	М-9-40		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	6	~~Х~~ 0	27
подписи членов жюри	Г.В. А.А.	А.А. И.Ч.	С.М.Б. Г.В.	А.А. [illegible]	[illegible] И.Ч.	Г.В.

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-9-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

№1

Допустим, что можем. Тогда, пусть сторона этого квадрата равна n. Очевидно, что полоски ширины 1 и длины, большей n, мы выбирать не можем, так как они не поместятся целиком в квадрат $n \times n$. +

Тогда, рассмотрим сумму площадей всех полосок длины $\leq n$. Эта сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

$n > 1$, это верно по условию $\mid +n$ $(n>0)$

$2n > 1+n \mid :2$ $(\frac{1}{2} > 0)$

$n > \frac{n+1}{2} \mid \cdot n$ $(n>0)$

$n^2 > \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда, площадь этого квадрата строго больше суммы площадей всех полосок, которые мы теоретически можем взять $\Rightarrow$ противоречие.

Ответ: не можем.

75

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Заметим, что уравнение вида $y=x^2$ имеет всего 2 решения: $\pm\sqrt{y}$ (если $y>0$)

Тогда, чтобы основание было параллельно оси абсцисс (Ox), координаты их точек должны иметь вид $\{x_1, x_1^2\}=A$, $\{-x_1, x_1^2\}=B$, $\{x_2, x_2^2\}=C$, $\{-x_2, x_2^2\}=D$

Тогда, длины оснований — $2x_1$ и $2x_2$ соотв $\Rightarrow k = 4x_1x_2$. Подставим диагональ в общее уравнение прямой (тк диагонали не могут быть перпендикулярно Ox или Oy, то пусть $b=1$)

$$\begin{cases} a x_1 + x_1^2 + c = 0; \\ -a x_2 + x_2^2 + c = 0; \end{cases}$$ вычтем

$a(x_1+x_2) + (x_1-x_2)(x_1+x_2) = 0$. Тк $x_1 \neq x_2$, можем разделить на $x_1 - x_2$

$a + x_1 + x_2 = 0$; $a = \cancel{-x_2 - x_1}$. $a =$

$c = x_1(-x_1-x_2) + x_1^2 + c = 0$;

$c = x_1 x_2$;

Пусть $\{x_3, y_3\}$ — коорд. искомой точки. Тогда

$x_3(-x_1 - x_2) + y_3 + x_1 x_2 = 0$.

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-9-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

то пусть $b=1$) Тогда, (будем считать, что $x_1, x_2 > 0$)

$$\begin{cases} ax_1 + x_1^2 + c = 0; \\ -ax_2 + x_2^2 + c = 0; \end{cases}$$ Вычтем

$a(x_1+x_2) + (x_1-x_2)(x_1+x_2) = 0$. $\;| : x_1+x_2$ $(x_1 и x_2 > 0)$

$a + x_1 - x_2 = 0;$

$a = x_2 - x_1.$

$x_1(x_2 - x_1) + x_1^2 + c = 0;$

$c = -x_1x_2$. Подставим искомую точку

$(x_2 - x_1)x_3 + y_3 - x_1x_2 = 0;$

Тогда, $x_3 = 0$, $y_3 = x_1x_2 = \frac{k}{4}$. Тогда, очевидно если эта точка принадлежит одной диагонали, то будет принадлежать и второй, тк $x_3 = 0$
$\Rightarrow$ точка симметрична относительно Oy самой себе $\Rightarrow$ тк трапеция тоже симметрична относительно Oy самой себе
(A сим. B, C сим. D), лежит на диагонали, а не на продолжении, тк $-|x_1| < 0 < |x_2|$, $-|x_2| \leq 0 < |x_1|$, а также принадлежит любой другой трапеции, так как выбор точки зависит только от k.

75.

ЗАДАЧА № 9. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть и в А, и в В есть хотя бы 1 рыцарь. Тогда, любой рыцарь в А проиграл лжецу, но также рыцарь в В победил хотя бы 1 рыцаря => противоречие, так как побежденный рыцарь не мог сказать такую фразу. ✓

Пусть в А нет рыцарей, тогда, рыцари из В не могут сказать свою фразу => либо рыцарей в В нет, либо противоречие. Тогда, в В только лжецы ✓. Тогда,

1) либо в А есть лжецы и тогда, он соврет => либо этот лжец проиграл рыцарю, что невозможно, либо он не проигрывал и А победит ✓

2) В А нет лжеца, тогда, лжецы из В победили (тк 2 побед. не могут) не более 1 рыцаря => победили не более кол-во человек в В раз, что меньше кол-ва рыцарей в А (тк в А людей больше, чем в В, в В все лжецы, в А все рыцари) и тогда, либо А победили, либо найдется рыцарь который не может сказать правду тк его не победили => противоречие. Ответ: победила команда А.

+2б.

7б.

ЗАДАЧА № 9.4 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | м-9-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим положение числа 500, и рассмотрим сумму до него и после с ним включительного, пусть это будет Σ_1 и Σ_2

Тогда, $\Sigma_1 + \Sigma_2 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} + 1000.$? +500

Тогда, $\max(\Sigma_1, \Sigma_2) \geq \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \geq \frac{1000 \cdot 1002}{2 \cdot 2}$
$> \frac{10^6}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 10^5}{2} = 2{,}5 \cdot 10^5.$

Заметим, что это число больше 100000. Минимальная сумма, начин./заканч. в 500 это ровно 500. Тогда, начнём последовательно брать элементы с той стороны от 500, где сумма от начала до 500/от 500 до конца, больше. На каждом шаге будет прибавляться от ~~50~~ 1 до 1000 => разность между суммами на соседн. шаге не больше 1000. По дискр. непрерывности, а также потому, что конечное значение суммы > 100500 + 1000·2, то найдется момент, когда сумма принимает значение от 100001 до 101000 (так как на шаге до этого сумма была $\leq 10^5$ и мы прибавили число, не большее 1000.

ЗАДАЧА № 9. 4	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Тогда, если число лежит в диапазоне от 10^5+1 до 10^5+500, то это искомая сумма. Иначе, отнимаем 500, тк оно край отрезка и после убирания 500, подмножество выбранных останется подотрезком.

Тогда, получим число в диапазоне $[10^5+501-500, 10^5+1000-500] = [10^5+1, 10^5+500]$ и это нужный нам диапазон. Ч.Т.Д.

65

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 9

ШИФР М 9-2-40

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	~~1~~ 6	~~2~~ 7	~~3~~ 8	~~4~~ 9	~~5~~ 10	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	0	0	21
подписи членов жюри	А.А. И.Ч.	С.М.Б.	И.Ч.	И.Ч.	А.А. С.А.	

ЗАДАЧА № 9. 6	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$10 - 10 \cdot 3 = -20.$

Ответ: Одно из чисел равно -20.

7б.

ЗАДАЧА № 9.6	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть эти числа — $x_1, x_2 \ldots x_7$

Тогда, $\sum_{i=1}^{7} x_i = 10$. ~~Пусть~~

Пусть значение, которое запишет Петя для x_i это $x_i(10-x_i)$. Пусть какие-то два значения для x_i и x_j равны. Тогда,

$x_i(10-x_i) = x_j(10-x_j)$

$10(x_i - x_j) + (x_i - x_j)(-x_i - x_j) = 0$,

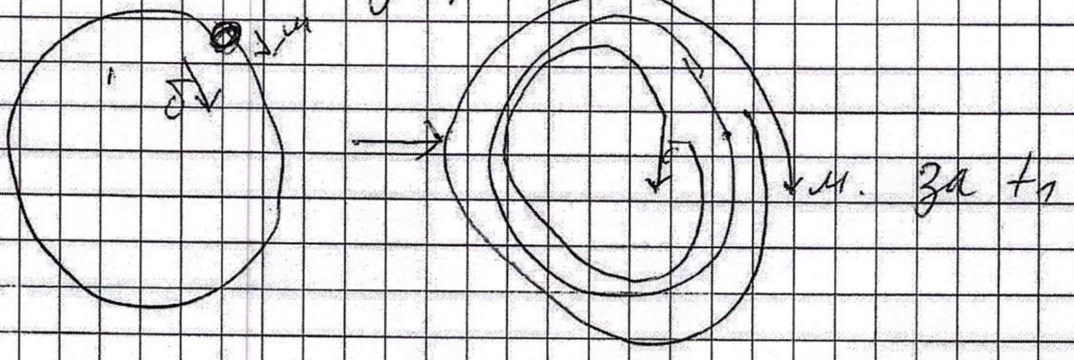
$(x_i - x_j)(10 - x_i - x_j) = 0$, $|: x_i - x_j$ (все числа разл)

$10 - x_i - x_j = 0$, $x_i + x_j = 10$. Тогда, если также подходит пара индексов $\{i, k\}$, то $x_i + x_k = 10$, $x_k = 10 - x_i = x_j \Rightarrow$ противоречие

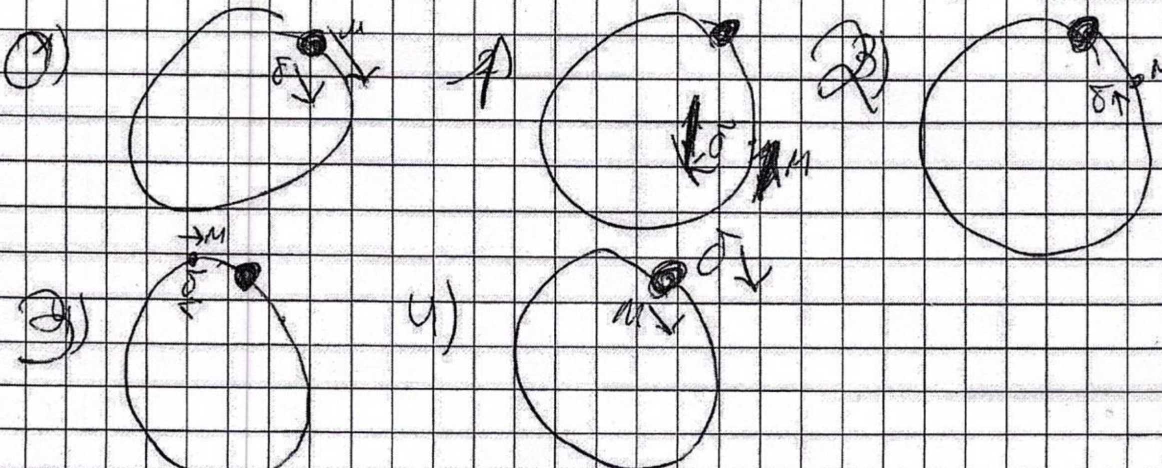
Тогда, каждое число распределено в какую-его группу, но в каждой группе с равными значениями в тетради не более 2. Тогда, если всего 2 группы, где > 1 числа, то всего элементов не более $2+2+1+1 = 6 < 7 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ будет ровно 3 пары и 1 элемент без пары. Сумма в каждой паре равна $10 \Rightarrow$ число без пары равно

ЗАДАЧА № 9. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть время на то, чтобы быстрому таракану перегнать медленного за круг равно t_1, а чтобы за круг встретиться лицом к лицу равно t_2



Тогда, пусть скорость медленного таракана равна v. Тогда, сначала пройдет t_1 времени и будет сдвиг медленного на vt_1 вперед. Затем, они будут направлены в разные стороны и это сдвиг vt_2 назад



ЗАДАЧА № 9. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Затем, они снова направлены в ~~разные~~ одну стороны и это сдвиг на Vt_1 назад,
И затем, они будут направлены в разные стороны и это сдвиг Vt_2 вперед.
Тогда, итоговый сдвиг за 4 встречи равен $Vt_1 - Vt_2 - Vt_1 + Vt_2 = 0 \Rightarrow$ каждые 4 встречи тараканы будут направлены в одну и ту же сторону, совпадающую с час. направ (примечание: везде это направление указано как „вперед"), а также они в исходной точке $\Rightarrow$ с одинаковой длины 4 встречи они будут в исходной точке, а $100 : 4 \Rightarrow$ на расстоянии 0.
Ответ: на расстоянии 0.

7

ЗАДАЧА № 9. 8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Тогда, $S_{H_cM_aM_b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}CH_c \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{8}H_cC \cdot AB = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Тогда, $dist^*(M_b, H_cM_a) = \frac{2S_{H_cM_aM_b}}{H_cM_a} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABC}}{\frac{1}{2}BC} = \frac{1}{2}AH_a$ (AH_a это высота из точки A к BC)

по равенству медианы к гипотенузе и половины гипотенузы в прямоуг. треуг.

по формуле площади треуг. $S_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$

Тогда, $dist^*(M, YP) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AH_a = \frac{1}{3}AH_a$.

Аналогично, гомотетируем из точки C с коэф-ом $\frac{3}{2}$. $R(M) = M_c$, $R(Q) = M_a$, $R(P) = B$, $R(X) = H_b$.

$S_{H_bM_aM_c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BH_b \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}S_{ABC}$.

$dist^*(M_c, H_bM_a) = \frac{2S_{H_bM_aM_c}}{H_bM_a} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABC}}{\frac{1}{2}BC} = \frac{1}{2}AH_a$.

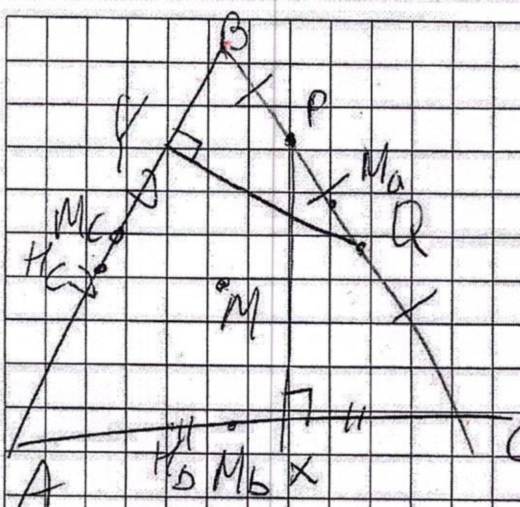
Тогда, $dist(M, XQ) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AH_a = \frac{1}{3}AH_a = dist(M, YP)$.

Ч.Т.Д.

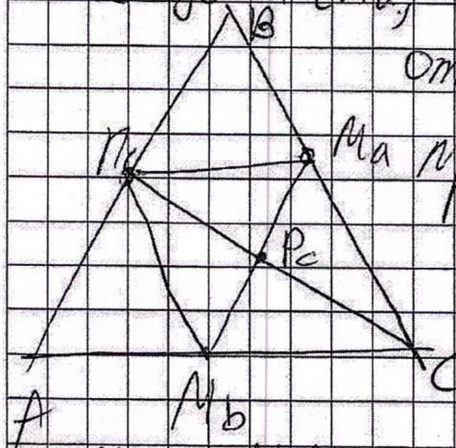
$*dist(P, L)$ — расстояние от точки P до прямой L

$R(?)$ — гомотетия от (·)

ЗАДАЧА № 9.8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Применим гомотетию относительно точки B с коэф. $\frac{3}{2}$. Тогда, $(\cdot)M$ R(точка пересечения медиан) = середина стороны AC т.к. M делит любую медиану в отношении $2:1$. (то есть M_b), $R(P)$ = середина стороны BC (то есть M_a), $R(Y) = H_c$ (основание высоты из точки C) т.к. $YQ \parallel CH_c$, т.к. $YQ \perp AB \perp CH_c$ а также $\frac{BC}{BQ} = \frac{3}{2}$ => по теореме Фалеса $BH_c : BY = \frac{3}{2}$. Тогда, найдем расстояние от M_b до H_cM_a, это в $\frac{3}{2}$ больше, чем расстояние от пересечения медиан до прямой QY из-за гомотетии.



(она $\parallel AB$ и равна $\frac{1}{2}AB$)
M_aM_b — средняя линия =>
пусть P_c это пересечение CH_c и M_aM_b => $H_cP_c \perp M_aM_b$, $H_cP_c = \frac{1}{2}CH_c$

Тогда, ~~$S_{H_cM_aM_b} = \frac{1}{2}H_c \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Расстояние от M_b до прямой H_cM_a равно $\frac{\frac{1}{2}S_{ABC}}{\frac{1}{2}H_cM_a} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABC}}{\frac{1}{2}BC}$~~

ЗАДАЧА № 9.10	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-40 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Возьмем число, равное

$(5t \cdot 10^k - x) = n$.

Тогда, $n^2 = (25t^2 - 1) 10^{2k} + 10^{2k} - t x \cdot 10^{k+1} + x^2$

$(n+1)^2 = (25t^2 - 1) 10^{2k} + 10^{2k} - t(x-1) \cdot 10^{k+1} + (x-1)^2$

Тогда, все, что ~~после~~ до ~~вторым~~ слагаемого вида $m \cdot 10^{2k}$, не меняется $\Rightarrow$

рассмотрим такой „обмен цифрами", что конкатенация $100 - tx$ и x^2 равносоставлена с $100 - t(x-1)$ и $(x-1)^2$, чтобы наши числа в итоге стали равносоставлены, т.к вычиталось из тех же нулевых разрядов $\Rightarrow$ играют роль только эти числа,

а также нужно, чтобы k было дост. большим, чтобы $2k > k+1$, но при $k > 1$ это выполнимо. Нет идей дальше

Ответ: может

0б

нет примера