Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	9
ШИФР	М-9-32		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	2	7	~~0~~ 0	~~0~~ 0	16
подписи членов жюри	С.М.Б. А.А.	А.А. И.Ч.	С.А. С.М.Б.	А.А.	А.А.	

ЗАДАЧА № 9 . 1	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: нет

Решение:

Пусть Олег сможет собрать квадрат с площадью n^2, со сторонами соответственно n

Тогда всего у Олега есть ровно n прямоугольников длиной не больше n. Если длина прямоугольника $> n$, то он не „влезет" в квадрат, то есть при сборке квадрата такой прямоугольник использовать нельзя, т.к. его длина больше стороны квадрата.

Но заметим что сумма площадей всех прямоугольников длиной не более $n = (n+1):2 \cdot n$, но чтобы собрать квадрат $n \times n$ нужно ~~как минимум~~ площадь n^2, но при $n \neq 1$

$(n+1):2 \cdot n < n^2$, т.к. $(n+1):2 < n$, т.к

$\frac{n}{2} + 0{,}5 < n$ если $n \geq 2$, но n по условию $\geq 2 \Rightarrow$

ЗАДАЧА № 9 . 1	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

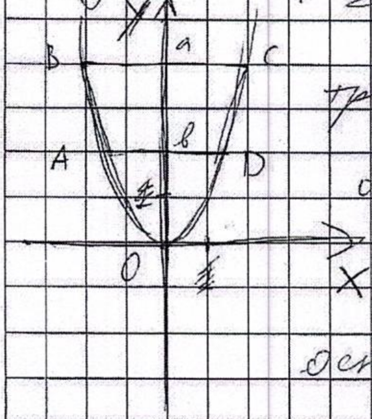
⇒ сумма площадей всех прямоуголь-
ников длиной не более 4 меньше
чем площадь квадрата, который нужно
собрать ⇒ квадрат собрать невозможно

4б.

ЗАДАЧА № 9 . 2	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Заметим, что все рассмотренные ~~нар~~ трапеции — р/б, т.к. основания трапеций || оси абсцисс => координаты по оси ординат точек при основании совпадут. Заметим что точка пересечения диагоналей любой трапеции будет лежать на оси ординат, т.к. (.) пересечения диагоналей трапеции лежит на прямой проходящей через середины оснований трапеции.

Теперь найдём координату y этой (.) для данного числа $k>0$ по оси OY (ординат)



Пусть $ABCD$ — какая-то из рассматриваемых трапеций. тогда пусть основание $BC=a$, и тогда координаты (.) $C=(x_a; y_a)$, (.) $B=(-x_a; y_a)$, основание $AD=b$, координаты (.) $D=(x_b; y_b)$; (.) $A=(-x_b; y_b)$

ЗАДАЧА № 9. 2	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

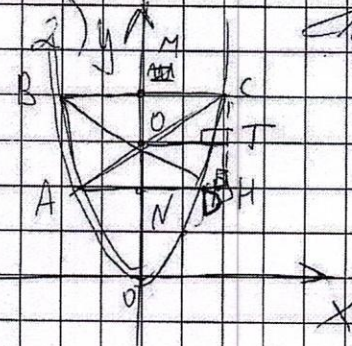
$a \cdot b = k$ по усл.

1) Т.к. все (.) трапеции $\in$ параболе $y = x^2$, то $y_a = (\pm x_a)^2$ $y_b = (\pm x_b)^2$ ~~и т~~

~~Тогда~~ выразим длины a и b ~~через~~ y_a и y_b.

$$\left.\begin{aligned} a &= 2 \cdot x_a = 2 \cdot \sqrt{y_a} \\ b &= 2 \cdot x_b = 2 \cdot \sqrt{y_b} \end{aligned}\right| \Rightarrow k = a \cdot b = 4\sqrt{y_a \cdot y_b}$$

2)



~~Пусть~~ $BD \cap AC = (.)\, O$; $BC \cap OY = (.)\, M$
$AD \cap OY = (.)\, N$

$\angle$ прямоуг. $\triangle CAH$, где H — высота к прямой AD из (.) C

$$\left.\begin{aligned} AH &= \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a \\ CH &= y_a - y_b \end{aligned}\right| \Rightarrow AC = \sqrt{(\sqrt{y_b} + \sqrt{y_a})^2 + (y_a - y_b)^2}$$
(см. п. 1)

4) ~~Пусть~~ OT — перпендикуляр из (.) O к CH

$OT = MC = NH = \frac{1}{2}a = \sqrt{y_a}$

5) Заметим, что $\cos\angle OCT = \cos\angle ACH =$ 5.4 9.б.

$= \dfrac{\frac{1}{2}(a+b)}{AC} = \dfrac{\sqrt{y_a} + \sqrt{y_b}}{\sqrt{(\sqrt{y_b} + \sqrt{y_a})^2 + (y_a - y_b)^2}}$, ~~тогда~~ ~~CT~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow CT = \cos\angle OCT \cdot OC$, где

$OC = \dfrac{OT}{\sin\angle OCT} = \dfrac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{1 - \cos\angle OCT}} = \dfrac{\sqrt{y_b}}{\sqrt{1 - \cos\angle OCT}}$ но тогда

$TH = CH - CT$ можно найти, а тогда

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

координата (·) O по OY = $y_в + TH$. Если произвести расчёты оказывается, что при любом $k > 0$ координата (·) O по OY =

$= \sqrt{y_a \cdot y_в} = \frac{k}{4}$

То есть в любой удовлетворяющей условию трапеции (·) пересечения определяется единственным образом, ⇒ все диагонали всех возможных трапеций пересекаются в (·) O с координатами $O = (0; \frac{k}{4})$ #

?

2б Указана точка нет док-ва

ЗАДАЧА № 9 . 3	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть Р – рыцарь Л – лжец.

Предположим что в турнире победила команда В.

Тогда ~~А~~ все возможные случаи, при которых игрок команды В мог победить игрока команды А:

v 1) Рыцарь команды В побеждает рыцаря команды А. Но такое не возможно, т.к после игры рыцар команды А подтвердил что проиграл лжецу в какой-то из игр, но каждый игрок после проигрыша выходит из игры ⇒ каждый игрок проиграл не более 1 раза, т.е Р команды А не мог проиграть Р команды В, т.к. он ~~либо~~ проиграл Л. ~~либо не проигрн~~ ⇒ такой случай не возможен. +

v 2) Рыцарь команды В (далее $Р_в$) победил лжеца команды А (далее $Л_а$).

ЗАДАЧА № 9 . 3	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

После нескольких побед над лжецами ~~Р~~ Рв придётся выиграть двух рыцарей команды а (Ра) т.к. после игры Рв подтвердил, что убил не менее двух Ра, однако Рв не может победить Ра (см. случай 1) => такое тоже не возможно +

3) Лв победил Ла, но тогда получается, что Ла, сказав после турнира что проиграл лжецу не соврёт. Противоречие => такой случай не возможен +

4) ~~Ла~~ Лв победил Ра. Такое возможно, однако Лв после победы над Ра больше не мог победить Р, т.к. после ~~игр~~ турнира соврал, что победил как минимум 2 Р, также Лв не мог победить Л (см. случай 3) => после единственной победы, Лв проигрывает А может Лв больше ни с кем не играть!

Однако из рассмотренного выше следует, что игрок команды В может

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

победить не более одного игрока команды А. Но по условию в команде А больше игроков => даже если все игроки команды В будут Л, победившими одного P_a, в конце останется как минимум один игрок команды А, который победит последнего игрока команды В => выиграет в любом случае команда А, т.к. команда В победить не может.

Ответ: победила команда А.

7/5

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	9
ШИФР	М 9-2-32		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	~~1~~ 6	~~2~~ 7	~~3~~ 8	~~4~~ 9	~~5~~ 10	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	5	7	0	0	0	12
подписи членов жюри	А.А. И.Ч.	С.М.Б.		А.А.	А.А. С.А.	

ЗАДАЧА № 9 . 6 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-9-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: число -20

Решение

Пусть 7 записаных на доске чисел = ~~...~~ a, b, c, d, e, f, g в каком-то порядке. Тогда полученные произведения $= a(b+c+d+e+f+g)$; $b(a+c+d+e+f+g)$ и т.д.

в тетради встречаются только 4 различных числа, такое возможно только если есть 3 разные „пары" равных произведений и ещё одно, отличное от них произведения

почему только так? −2б

Без ограничения общности, пусть

$a(b+c+d+e+f+g) = b(a+c+d+e+f+g)$

$c(a+b+d+e+f+g) = d(a+b+c+e+f+g)$

$e(a+b+c+d+f+g) = f(a+b+c+d+e+g)$

1. ~~А~~ первую пару

$a(b+c+d+e+f+g) = b(a+c+d+e+f+g)$ то есть

$ab + a(c+d+e+f+g) = ab + b(c+d+e+f+g)$

~~однако $c+d+e+f+g = c+d+e+f+g$, а $ab = ab$~~

ЗАДАЧА № 9.6	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

то есть $a(c+d+e+f+g) = b(c+d+e+f+g)$

так как $ab = ab$

$a \neq b$ по условию $\Rightarrow$ полученное выше могло получиться только если

$c+d+e+f+g=0$

2. Соответственным (как в п. 1) образом рассуждая получаем систему:

$$\begin{cases} c+d+e+f+g=0 \\ a+b+e+f+g=0 \\ a+b+c+d+g=0 \end{cases}$$

Но по условию

$a+b+c+d+e+f+g=10$

$a+b=c+d=e+f=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b+c+d+e+f+g = 10+10+10+g = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow g=-20$, то есть одно из выписанных чисел $= -20$

5 б.

ЗАДАЧА № 9 . 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: на расстоянии 0 м, то есть в отмеченной точке

Решение:

Пусть быстрый таракан – Б, медленный – М; время до встречи тараканов, если они начинают движение из одной (·) в одном направлении $= t_1$, из одной (·) в разных направлениях $= t_2$, за время t_1 М пробегает расстояние S_1, за время t_2 соответственно S_2.

1. До первой встречи М пробежал S_1 от „старта" (отмеченной точки), после чего пробежал S_2 к старту. И произошла вторая встреча, на расстоянии $|S_1 - S_2|$ от старта. После чего М и Б побежали в одном ~~нап~~ направлении, к старту и третья встреча произошла на расстоянии $|S_1 - S_2 - S_1|$ от старта, после чего М развернулся и четвёртая встреча

ЗАДАЧА № 9 . 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

произошла на расстоянии $|S_1 - S_2 - S_1 + S_2|$ от старта, но заметим что $S_1 - S_2 - S_1 + S_2 = 0$ и $\Rightarrow$ после четвёртой встречи тараканы побежали из отмеченной точки в одном направлении $\Rightarrow$ каждая четвёртая встреча тараканов будет происходить в отмеченной точке, но $100 \vdots 4 \Rightarrow$ их 100-я встреча также произойдёт в отмеченной точке.

7б

ЗАДАЧА № 9 . 9	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: ~~...~~ ~~6^4~~ 6^{37}

Решение: Точки, являющиеся вершинами ΔT могут принадлежать ~~одному~~ только множествам (линейным) точек на рёбрах ΔT ⇒ одним из линейных мн-в точно будет „ребро" ΔT. Заметим что если убрать все (·)-ки, принадлежащие множеству „ребро", то останется множество точек, которое получится, если правильный Δ со стороной 111 − 1 разбить прямыми, ∥ его сторонам на правильные Δ-ки со стороной 1 и отметить вершины всех Δ кроме одной.

Соответственным образом рассуждая, каждое последующее линейное мн-во содержит на 1 (·) меньше предыдущего ⇒ в какой-то момент останется 3 вершины Δ и его нужно будет „разбить" на 1 линейное мн-во, но такое возможно только если одна из вершин

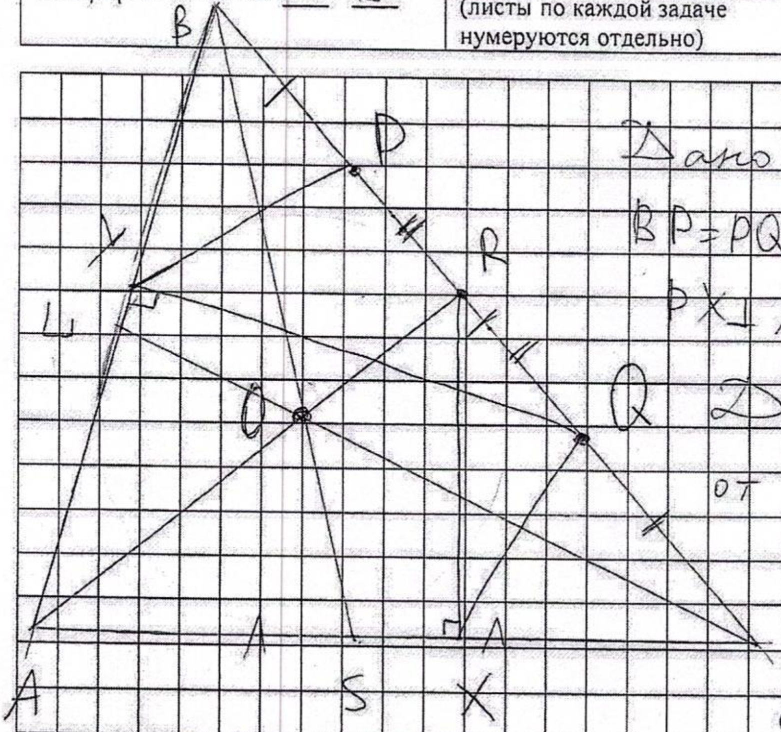
Неверное понимание линейного множества. 0б

ЗАДАЧА № 9.9 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | M-9-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

не отмечена, то есть является центром исходного ∆ T

Таким образом мы получили, что если брать ∆-ки (правильные) со ~~чётной~~ стороной длины, кратной 3 и центром в центре ∆ T то стороны каждого из них будут состоять ровно из трёх линейных множеств, причём в одно из них будет входить 2 вершины ∆, в одно 1 вершина и в одно 0 вершин. То есть стороны каждого ∆ могут быть образованы 6 различными способами. Теперь посчитаем, что различных ∆-ов со ~~чётными~~ сторонами $\vdots 3$ и ≤ 111 = $\frac{111}{3} = 37$ => способов разбиения всех отмеченных точек на 111 линейных множеств ровно 6^{37}

ЗАДАЧА № 9 . 8	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Дано $\triangle ABC$ - остроугольн.

$BP = PQ = QC$

$PX \perp AC$ $QY \perp AB$

Док-ть O равноуда от XQ и YP, где

т. O — т. пересечения медиан AR, BS и CL $\triangle ABC$

1. Впишем в $\triangle ABC$ ок-ть ω, она будет касаться $\triangle ABC$ в точках R, S, L.

~~Заметим, что т. O~~

0б

ЗАДАЧА № 9.10

ЛИСТ 1 ИЗ 0

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-9-2-32

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: нет

Решение:

Предположим, что такое n существует тогда n^2 и n^2+2n+1 отлича-ются перестановкой цифр

Очевидно, что чётность последней цифры квадратов различна. Больше ничего не очевидно.

0б-

решения нет