Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	9
ШИФР	М-9-27		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	~~X~~ 0	0	21
подписи членов жюри	Г.В А.А.	А.А. И.Ч,	М.Б.С.	А.А.	Ч.Ч.	

ЗАДАЧА № 9. 5	ЛИСТ 9 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Т.к. K, D, E, F лежат на окр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow KFED$ - впис. $\Rightarrow \angle EFK + \angle EDK = 180^\circ$

$\angle EFK = \angle FED \Rightarrow \angle FED + \angle EDK = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow EF \parallel DK \Rightarrow EFDK$ - р/б трапеция +

Проведем BF и OC (D, O, C не обяз. на одной прямой лежат, просто такой рисунок) +

Заметим, что т.к. O - центр описанной около FED, то $2\angle EFD = \angle EOD$ +

(т.к. центральный в 2 раза больше вписанного)

$\Rightarrow$ если доказать вписанность $DOBE$+, то $\angle EOD = \angle EBD$, $\angle EBD = \angle ABK$ (как вертикал.) и тогда всё получится.

Чтобы доказать эту вписанность надо либо док-ть впис. FBOC (тогда $\angle OFC = \angle CBO = \angle EDO \Rightarrow ODEB$ впис.)

Об

почему?

либо $BO \parallel AK$, тогда $\triangle ABK = \triangle FOK$

т.к. р/б и вершины на прямой $\parallel$ основаниям, которые равны $\Rightarrow \angle ABK = \angle FOK = \angle DOE$ (см. выше) $=$

$= 2\angle EFD = \angle EBD = \angle ABK$. ~~$= 2\angle = \angle EBD = \angle ABK = 2\angle$~~

? в как.

ЗАДАЧА № 9.5	ЛИСТ 8 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Проведём описанную около $\triangle EDF$ окружность и отметим её центр O

$\Rightarrow DO = OF = OE$ (т.к. радиусы) +

$\Rightarrow \angle ODE = \angle OED =$

$= \angle FED - \angle OEF$.

т.к. $\angle OEF = \angle OFE$

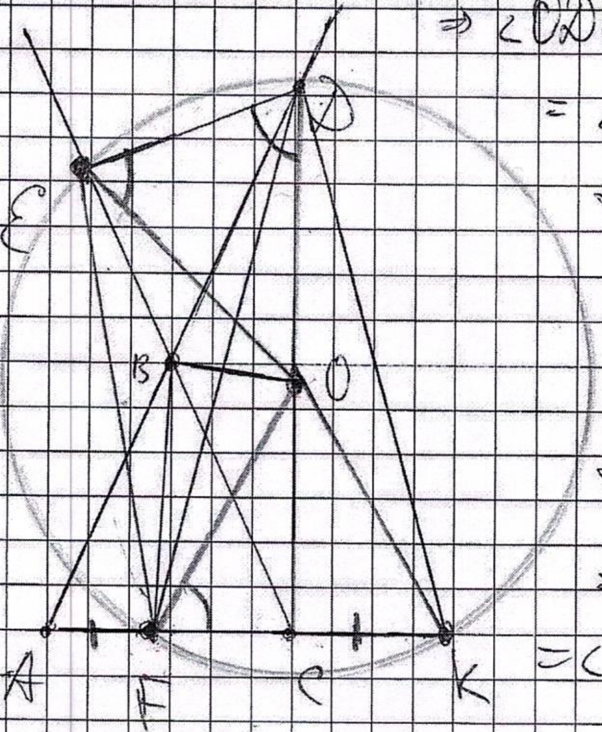
$(OE = OF)$ и

$\angle DEF = \angle CFE$,

то $\angle DEF - \angle OEF =$

$= \angle CFE - \angle EFO =$

$= \angle OFC$



Отметим на FC эту точку C такую (·)K, что $AF = CK \Rightarrow AC = AF + FC = FC + CK \Rightarrow$

$\Rightarrow FK = ED$ (т.к. $AC = ED$), $OF = OE$ и

$\angle OFK = \angle OED \Rightarrow \triangle OED = \triangle OFK \Rightarrow \angle FOK = \angle DOE$ и

$OK = OD \Rightarrow OK$ – радиус $\Rightarrow K$ лежит

на окр. и на $AC \Rightarrow$ это пересечение окр.

и AC +

ЗАДАЧА № 9.3 | ЛИСТ 7 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

=> ~~как~~ т.к. в B только ~~люди~~ люди, ~~то~~ и каждый из них выиграл не более одного из A => ~~они вы-~~ суммарно они выиграли не более B людей из A. Для победы необходимо выиграть всех людей из другой команды, но в A людей больше, чем в B, т.к. команда B выиграла не более B людей из команды A, то в A остался ≥1 чел-к => => A не проиграла.

Т.к. кто-то точно проиграл (т.к. в каждой игре кто-то вылетал), ~~то~~ и это не A => проиграла B => A выиграла.

7 б.

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 6 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть рыцари из A это P_A, лжец из A это $Л_A$, рыцари из B это P_B, лжец из B это $Л_B$.

т.к. все ответы были „да", то

каждый P_A когда-то проиграл $Л_B$,

каждый $Л_A$ не проиграл ни одному $Л_B$,

каждый P_B выиграл ≥ 2 P_A, каждый $Л_B$ выиграл не более 1 P_A.

Т.к игра на вылет, то те, кто проиграл, проиграли ровно 1 раз => каждый P_A проиграл только $Л_B$ => если в B есть рыцари, то какой-то P_A точно должен был проиграть P_B, ~~но P_A проигрывали~~ ~~но~~ (иначе P_B соврал бы), но P_A проигрывали только $Л_B$ => в B нет рыцарей => все из B лжецы. Мы уже ~~поня~~ поняли, что каждый ~~Л~~ $Л_A$ не проиграл ни одному ~~$Л_A$~~ $Л_B$ => каждый $Л_B$ мог выиграть только у P_A, но каждый $Л_B$ выиграл не более одного P_A

+2б.

ЗАДАЧА № 9. 2	ЛИСТ 5 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

рассмотрим другую трапецию $A'B'D'C'$ пусть D' имеет координату x_3 по x, а C' x_4 по x ⇒

⇒ аналогичным рассуждением

$Ok' = \frac{x_3 x_4}{[illegible]} = \frac{k}{4}$. → $Ok = Ok'$ ⇒

k и k' совпадают т.к. k и k' лежат внутри трапеций, которые лежат внутри $y=x^2$ (т.к. вписаны) ⇒

т.к. $y=x^2$ по одну сторону от Ox, то т.к. k и k' лежат на Oy (т.к. лежат на серперах) и $Ok = Ok'$ и по одну сторону от Ox, то они совпадают ⇒ диагонали любых двух трапеций пересекаются в одной точке ⇒ диагонали всех таких трапеций пересекаются в одной точке (т.к. попарно в одной и той же точке).

7Б

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 4 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Из симметрии следует, что ABCD – р/б трапеция ⇒ диагонали пересекаются на сер-перп., пусть это (·)K.

если у (·)D координата по x это x_1, а у точки C по x это x_2 $(x_2 > x_1)$, то у (·)N ~~ко~~ координата по y x_1^2, а у (·)M по y x_2^2 (т.к. $y = x^2$).

т.к. трапеция р/б, то $\triangle AKD$ и $\triangle$ ~~BKC~~ CKB (т.к. $\angle DBC = \angle BDA$ и $\angle CAD = \angle BCA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD) ⇒ соответственные элементы (высоты KN и KM) относятся так же, как основания ⇒ $\frac{MK}{KN} = \frac{BC}{AD} = \frac{2x_2}{2x_1} = \frac{x_2}{x_1}$ ⇒

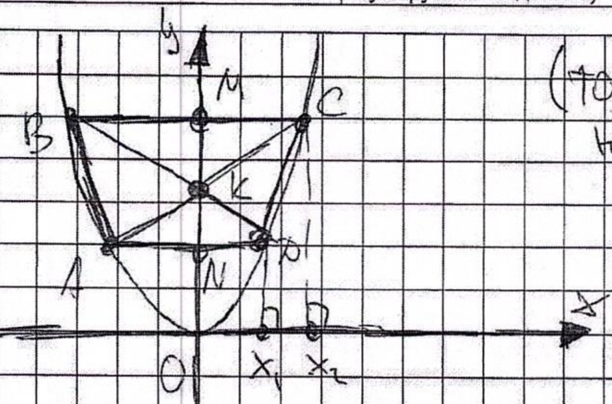
⇒ ~~...~~ т.к. $MN = (x_2^2 - x_1^2)$, то $NK = \frac{(x_2^2 - x_1^2)\cdot x_1}{x_1 + x_2}$,

$NO = x_1^2$ ⇒ $OK = NK + NO = x_1^2 + \frac{(x_2^2 - x_1^2)x_1}{x_1 + x_2} =$

$= x_1^2 + (x_2 - x_1)x_1 = x_2 x_1 + x_1^2 - x_1^2 =$

$= x_1 x_2 = \frac{k}{4}$

ЗАДАЧА № 9. 2	ЛИСТ 3 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



(Точности построения нет, она не важна)

$AD \parallel Ox$ по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (·)A и (·)D имеют одинаковую координату по y $\Rightarrow$ модули их координат по x равны (т.к. лежат на $y=x^2$) $\Rightarrow$ N – это ~~сер~~ середина AD и если $ND = x_1$, то $AD = 2x_1$

Аналогично ~~BC~~ $BM = MC$ и $BC = 2x_2$ $\Rightarrow$ $k = 4x_2x_1$. Т.к. $y = x^2$ симметрична относительно O_y, A и D симметричны, B и C ~~тоже~~ тоже симметричны (относительно O_y), и $AD \parallel BC \parallel O_x$, то $ABCD$ тоже симметрична относительно O_y (это еще следовало из того, что $AM = MD$, $BM = MC$ и $BC \parallel AD \parallel Ox$) $\Rightarrow$ т.к. $O_y \perp O_x$, $BC \parallel AD \parallel O_x$, то MN – сер. перп. к BC и AD

ЗАДАЧА № 9.1 | ЛИСТ 2 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Док-м это: $k^2 > \frac{k(k+1)}{2} \quad \Big| \cdot 2$

$$2k^2 > k(k+1)$$

$$2k^2 > k^2 + k \quad \Big| -k^2$$

$$k^2 > k$$

$$k^2 - k > 0$$

$k(k-1) > 0$ – это верно, т.к. $k > 1 \Rightarrow k-1$ и k – это натуральные числа ~~т.к. $k > k-1$, то $k(k-1) \geq 0$~~ $\Rightarrow k(k-1)$ тоже натуральное $\Rightarrow$ $\Rightarrow > 0 \Rightarrow$ т.к. все преобразования равносильны, то и исходное нер-во верно $\Rightarrow$ площадь квадрата больше того, что Олег мог получить $\Rightarrow$ квадрат Олег составить не мог.

75

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 1 ИЗ 9 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть у Олега получилось составить квадрат, у которого площадь ≥ 1.
Рассмотрим ~~в~~ самый длинный прямоугольник, который использовал +
Олег. Пусть это прямоугольник $1*k$. $\Rightarrow$
все остальные прямоугольники, которые использовал Олег $< 1*k$, т.к. $1*k$ самый большой и сторона получившегося квадрата $\geq k$ (иначе бы $1*k$ просто не влез бы в квадрат, т.к. стороны $1*k$ $\parallel$ сторонам квадрата) $\Rightarrow$ площадь квадрата $\geq$
$\geq k^2$, но Олег мог использовать только прямоугольники $1*1 \leq \ldots \leq 1*k$ (т.к. $1*k$ самый большой) $\Rightarrow$ сумма площадей этих прямоугольников равна площади квадрата и равна $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, но $k>1$ (т.к. площадь квадрата > 1, а k наибольший)
~~$\Rightarrow k^2 > \frac{k(k+1)}{2}$~~ верно нер-во $k^2 > \frac{k(k+1)}{2}$.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 9

ШИФР М-9-2-27

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	0	0	21
подписи членов жюри	И.Ч. А.А.	С.М.Б.		И.Ч А.А.	И.Ч А.А.	

ЗАДАЧА № 9. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=10$

Сумма всех чисел, кроме a_i равна $10-a_i$,

т.к. сумма всех чисел равна 10. $\Rightarrow$

в тетрадь Пете выписал числа вида $a_i(10-a_i)$.

Т.к. среди этих семи чисел только ≤ 4 различных, то по принципу Дирихле найдутся хотя бы два попарно равных. Без ограничения общности пусть это будут $a_1(10-a_1)$ и $a_2(10-a_2)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1(10-a_1)=a_2(10-a_2) \Rightarrow 10a_1-a_1^2=10a_2-a_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10a_1-10a_2=a_1^2-a_2^2 \Rightarrow 10(a_1-a_2)=(a_1-a_2)(a_1+a_2)$

т.к. по условию числа различны, то $a_1-a_2\neq 0 \Rightarrow$

сократим на него и получим, что $a_1+a_2=10$.

Пусть есть еще ≥ 1 k такое, что $a_k(10-a_k)=$

$=a_1(10-a_1)=a_2(10-a_2) \Rightarrow$ аналогичными рассуждениями

получим, что $a_1+a_k=10 \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_k=10 \\ a_1+a_2=10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1=10-a_k \\ a_1=10-a_2 \end{cases} \Rightarrow 10-a_k=10-a_2 \Rightarrow a_k=a_2$,

а по условию все числа различны $\Rightarrow$

такого k нет.

ЗАДАЧА № 9.6 | ЛИСТ 2 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | м-9-2-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Осталось 5 чисел в тетради и среди них 3 различных $\Rightarrow$ по принципу Дирихле найдутся ≥ 2 попарно равных. Без ограничения общности пусть это будут $a_3(10-a_3)$ и $a_4(10-a_4)$. Проведя рассуждения, аналогичны $a_1(10-a_1)$ и $a_2(10-a_2)$, мы получим, что $a_3+a_4=10$ и нет такого k, что $a_k(10-a_k) = a_3(10-a_3)=a_4(10-a_4) \Rightarrow$ В тетради осталось 3 числа и среди них 2 различных $\Rightarrow$ по принципу Дирихле найдутся ≥ 2 попарно равных.

Без ограничения общности пусть это будут $a_5(10-a_5)$ и $a_6(10-a_6)$ $\Rightarrow$ рассуждая аналогично случаям выше получим, что $a_5+a_6=10$ и $a_7(10-a_7) \neq a_5(10-a_5)$ и $a_7(10-a_7) \neq a_6(10-a_6)$. $\Rightarrow \underbrace{a_1+a_2}+\underbrace{a_3+a_4}+\underbrace{a_5+a_6}+a_7 = 10+10+10+a_7=10 \Rightarrow a_7 = 10-30=-20$.

Ответ: -20.

7б

ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 3 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Без ограничения общности пусть изначально они двигались по часовой стрелке. Будем следить за быстрым. Пусть быстрый это A, а медленный это B. Пусть A догнал B и при этом прошел расстояние ℓ, т.к. B догнали, то он развернулся ⇒ A и B бегали навстречу и пусть до второй встречи A прошел расстояние d от первой встречи ⇒ т.к. двигались они навстречу друг к другу, то A поменял направление движения после второй встречи и стал догонять B, но уже против часовой стрелки ⇒ т.к скорости постоянны, то до места третьей встречи с места второй A пробежал ~~ℓ~~ расстояние ~~$-\ell$ (т.к. против часовой). Он догнал B ⇒ B развернулся ⇒ Они стали~~ т.к. скорости постоянны, то модуль расстояния равен ℓ, а т.к. двигался против часовой, то в итоге $-\ell$.

ЗАДАЧА № 9 . 7	ЛИСТ 4 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

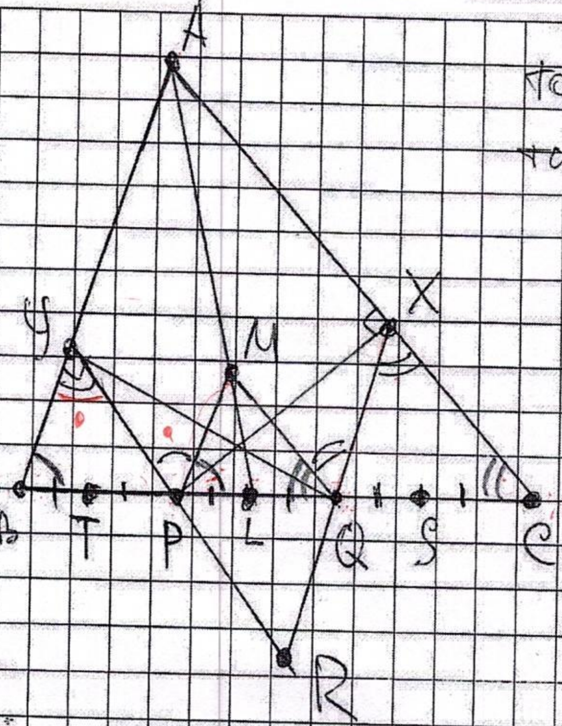
Он догнал В ⇒ В развернулся и они стали бежать навстречу, но А направления не менял ⇒ до места следующей встречи прошел $-d$ (т.к. скорости постоянны, а двигаясь навстречу они проходят расстояние, модуль которого равен d, при этом А двигался против часовой стрелки ⇒ прошел $-d$). ⇒ суммарно до места 4ой встречи А прошел $\cancel{l+d+(-d)}$ $l + d + (-l) + (-d) = 0$ ⇒

⇒ четвертая встреча состоялась в начальной точке и А снова поменял направление и стал догонять В (т.к. перед этим двигались навстречу, а В не поменял направление) по часовой стрелке ⇒ ситуация стала аналогична начальной ⇒ каждые 4 встречи ~~они во~~ ситуация становится начальной ⇒

⇒ т.к. $100 \vdots 4$, то сотая встреча произойдет в начальной точке ⇒ расстояние до нее будет 0.

7

ЗАДАЧА № 9. 8	ЛИСТ 5 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



точки P и Q идут в таком порядке, т.к. если бы Q была между B и P, то т.к. BP = PQ и B и Q по одну сторону от P и на одной прямой, то (·)B = (·)Q, а они различны

Проведем медиану AL т.к. BL = LC, то

BP + PL = LQ + QC, BP = QC ⇒ PL = QL ⇒

⇒ L - середина PQ ⇒ отметим T и S - середины BP и QC ⇒ т.к. BP = PQ = QC, то

BT = TP = PL = LQ = QS = SC Отметим

M - точку пересечения медиан ⇒ $\frac{AM}{ML} = \frac{2}{1}$

BP = 2PL (т.к. BP = BT + TP, BT = TP = PL) ⇒

⇒ $\frac{BP}{PL} = \frac{2}{1} = \frac{AM}{ML}$ ⇒ по Фалесу AB ∥ MP

Аналогично MQ ∥ AC

⇒ т.к. AB ∥ MP, то ∠ABC = ∠MPQ, MQ ∥ AC ⇒ ∠ACB = ∠MQP

ЗАДАЧА № 9. 8	ЛИСТ 6 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-27 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$\triangle BYQ$ - прямоугольный, $\angle Y = 90°$

P - середина BQ (т.к. $BP = PQ$) $\Rightarrow$

$YP = BP = PQ \Rightarrow \triangle BPY$ - р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle BYP$. $\angle BYP = \angle YPM$ как

накрест лежащий т.к. $AB \parallel PM \Rightarrow \angle YPM = \angle MPQ$

Аналогичными рассуждениями получаем, что $\angle ACB = \angle QXC = \angle MQX \Rightarrow \angle MQX = \angle MQP$

Пусть YP и QX пересекаются в (.)R $\Rightarrow$

$\Rightarrow PM$ и MQ - внешние бис-сы $\triangle PQR \Rightarrow$

$\Rightarrow M$ - точка пересечения внешних бис-с $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (.)M - центр вневписанной окружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow RM$ - бис-са $\angle YRX \Rightarrow$ т.к. бис-са - ГМТ

равноудаленных от сторон угла, то

~~(.)M~~ т.к. (.)M лежит на бис-се

$\angle YRX$, то она равноудалена от YP и QX

ч.т.д.

7б