Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА
КЛАСС	9
ШИФР	М-9-22

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

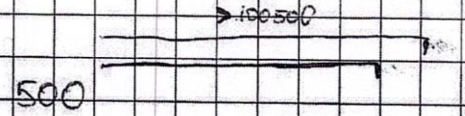
Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	6	0	27
подписи членов жюри	А.А.	А.А. И.Ч.	И.Ч С.М.Б.	А.А.	И.Ч.	

ЗАДАЧА № 9.4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим число 500. и с той стороны от него, где находится большая сумма чисел



отложим отрезок с мин. суммой >100500 (не включая само 500).

Такой отрезок найдётся, т.к. сумма чисел с одной из сторон от 500 будет

$\geqslant \frac{(1+2+\ldots+1000)-500}{2} = \cancel{5050000}\ \frac{500000}{2} = 250000$,

а макс число − 1000.

Предположим, что не существует отрезка с суммой $\in (100000; 100500]$. Значит, если выбранный отрезок уменьшить на 1, то сумма на нём будет $\leqslant 100000$ (т.к. мы выбрали отр с мин. суммой) и >99500, т.к. изначальн. был >100500, а максимально уменьшить мы могли на 1000.

с какой стороны?

Значит сумма $\in (99500; 100000]$ и если мы включим 500 в отрезок, то сумма будет $\in (100000; 100500]$. ч.т.д.

6б.

Можно ли это сделать?
М.б. м/у 500 и отрезком уже дырка?

ЗАДАЧА № 9 . 3

ЛИСТ 1 ИЗ 1

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-9-22

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть в команде В был рыцарь. Тогда он выиграл ≥ 2 рыцарей из команды А, но тогда бы эти рыцари соврали, сказав, что проиграли лжецу. Противоречие $\Rightarrow$ в команде В были только лжецы. + Значит, все кто проигрывал в команде А были рыцарями, + т.к. они сказали правду. А значит любой человек из команды В победил не более 1 раза +, иначе он бы выиграл ≥ 2 рыцарей и сказал правду. Если в команде А – x чел, В – y чел, то команда В сделала $\leq y$ побед, но по условию $x > y$, значит в команде А остались люди, которые не сыграли $\Rightarrow$ команда А победила

Ответ А.

2б

7б

ЗАДАЧА № 9. 2	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$BC = \frac{\frac{AC \cdot a}{b}}{\frac{b+a}{b}} = \frac{AC \cdot a}{b} \cdot \frac{b}{b+a} = \frac{AC \cdot a}{b+a}$$

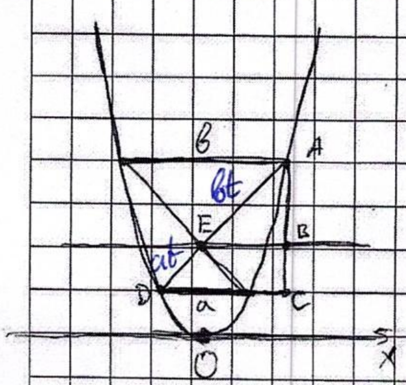
AC – это ордината верхнего основания минус ордината нижнего: $AC = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2-a^2}{4} = \frac{(b-a)(b+a)}{4}$

$$BC = \frac{\frac{(b-a)(b+a)}{4} \cdot a}{b+a} = \frac{(b-a)a}{4} = \frac{ab}{4} - \frac{a^2}{4}$$

Тогда ордината точки E: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + BC =$
$= \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{ab}{4} = \frac{k}{4}$. Значит она не зависит от a и b. А абсцисса равна 0, т.к. трапеция равнобедр. Значит точка E является точкой пересеч. диаг. для всех таких трапеций.

75

ЗАДАЧА № 9.2	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Рассмотрим трапецию с основаниями a и b, $ab = k$. По т. Фалеса проведём через точку пересечения диагоналей прямую параллельную Ox.

Продлим меньшее основание до пересечение с прямой $\parallel Oy$, ~~вы~~ проведённой из точки A.

$\triangle ABE \sim \triangle ACD$ (они прямоуг. с общим $\angle A$)

~~AB/AC = AD/ED AE/AD a ≠ b трапеции~~

$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{DE}$, а в трапеции диагонали точкой пересечение делятся в отношении оснований

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a}$ +

$BC = \frac{AB \cdot a}{b}$

$BC = \frac{(AC - BC)a}{b}$

$BC = \frac{AC \cdot a}{b} - \frac{BC \cdot a}{b}$

$BC + \frac{BC \cdot a}{b} = \frac{AC \cdot a}{b}$

$BC\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{AC \cdot a}{b}$

ЗАДАЧА № 9 . 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть Олег может составить квадрат $n \times n$. Для этого он может использовать только прямоуг. 1×1, 1×2, ... $1 \times n$, т. к. другие просто не поместятся. Максимальная суммарная площадь выбранных ~~этих~~ прямоуг. равна $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Т.к. $n > 1$, то

$$2n > n+1 \quad | : 2$$

$$n > \frac{n+1}{2} \quad | \cdot n$$

$$n^2 > \frac{n(n+1)}{2}$$

Площадь квадрата больше покрытой площади $\Rightarrow$ такого не может быть

Ответ: Нет.

7б.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 9

ШИФР М-9-2-22

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	~~1~~ 6	~~2~~ 7	~~3~~ 8	~~4~~ 9	~~5~~ 10	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	6	0	27
подписи членов жюри	А.А. И.Ч.	е.М.Б.		А.А.	А.А.	

ЗАДАЧА № 9.6 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть у Пети получились числа $b_1, b_2 \dots b_7$, а были числа $a_1, a_2 \dots a_7$.

$b_i = a_i \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_7 - a_i) = a_i(10 - a_i)$

У Пети получилось всего 4 различных числа, значит есть равные b_i-не. Пусть это b_1 и b_2

$b_1 = b_2$

$a_1(10-a_1) = a_2(10-a_2)$

$a_1(10-a_1) - a_2(10-a_2) = 0$

$10a_1 - 10a_2 - a_1^2 + a_2^2 = 0$

$-10(a_2-a_1) + (a_2-a_1)(a_2+a_1) = 0$

$(a_2-a_1)(a_1+a_2-10) = 0$

$a_2 - a_1 \neq 0$, т.к. все a_i различны

Значит $a_1 + a_2 = 10$

Заметим, что 3 и более b_i-ых не могут быть равны, т.к. тогда любые 2 a_i-ых из которых получились эти числа будут в сумме давать 10, а если их ≥ 3, то какието a_i-е совпадут.

Значит у Пети получилось 4 различных числа,

ЗАДАЧА № ~~09~~. 6	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

каждое из которых встречается ≤ 2 раз.

Значит 3 из них встречаются по 2 раза, а одно — 1 раз (т.к. чисел всего 7)

$\underbrace{b_1=b_2}, \underbrace{b_3=b_4}, \underbrace{b_5=b_6}, \underbrace{b_7},$ значит $a_1+a_2=10$, $a_3+a_4=10$, $a_5+a_6=10 \Rightarrow a_7 = 10-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) = 10-30 = -20$

Ответ. -20.

7б.

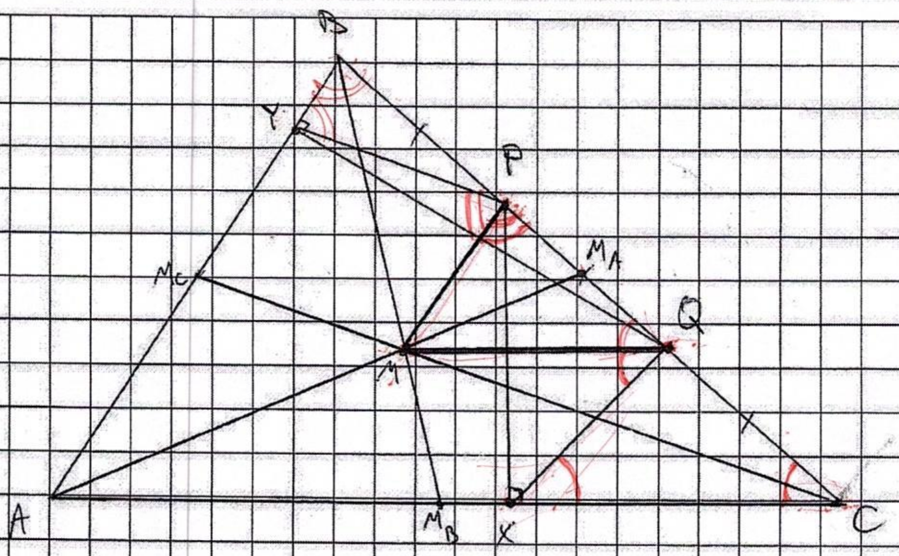
ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть быстрый таракан пробежал S м пока не встретил медленного во 2 раз и развернулся. Теперь они стоят в одной точке и бегут в одну и ту же сторону (т.к. медленный уже развернулся), противоположную ~~изб~~ изначальной. Т.к. их скорости не изменились, то до следующего своего разворота быстрый таракан будет бежать те же S м, но в противоположном направлении. То есть в 4-ый раз они встретятся там же, где и стартовали изначально. А значит каждую 4-ую встречу они будут оказываться там. Т.к. 100 ⋮ 4, то они встретятся в отмеченной точке в 100-ый раз => расст. равно 0 м.

Ответ 0 м.

7б

ЗАДАЧА № 9.8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Решение

Пусть M_A, M_B, M_C – основания медиан, M – точка их пересечения. Тогда M_A – середина PQ, т.к. $BP + PM_A = QM_A + QC$, а $BP = QC$.

$\triangle BCM_B \sim \triangle BQM$, т.к. $\angle B$ – общий, а $\frac{BM}{BM_B} = \frac{BQ}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \angle BQM = \angle BCA$ и $MQ \parallel AC$.

$\triangle CBM_C \sim \triangle CPM$, т.к. $\angle C$ – общий, а $\frac{CM}{CM_C} = \frac{CP}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \angle CPM = \angle CBA$ и $MP \parallel AB$

XQ и YP – медианы для прямоуг. $\triangle CXP$ и $\triangle BYQ \Rightarrow XQ = QC$, $YP = BP$ по св-ву прямоуг. $\triangle$. Значит $\angle CXQ = \angle BCA$, $\angle BYP = \angle CBA$. $\angle MQX = \angle CXQ$, т.к. $MQ \parallel AC$.

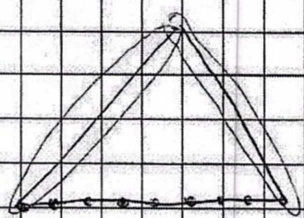
ЗАДАЧА № 9 . 8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$\angle MPY = \angle BYP$, т.к. $AB \parallel PM$. Значит QM – биссектриса угла XQB, а PM – биссектриса угла YPC. Значит M равноудал. от прямых XQ и BC и от прямых YP и BC, то есть и от XQ и YP.

7б

ЗАДАЧА № 9 . 9	ЛИСТ 1 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Назовём прямую хорошей если есть ~~[illegible]~~- минейтное множ-во которое полностью лежит на этой прямой. Докажем, что в правильном треугольнике со стороной $3n$, $n \in N$, прямые, содержащие его стороны являются хорошими. Пусть это не так. Рассмотрим вершины треугольника. Каждая из них может лежать только в множ-ве, лежащем на стороне, а все 3 они быть в том множ-ве не могут $\Rightarrow$ ≥ 2 стороны лежат на хороших прямых. Значит их ровно 2 по предположению.

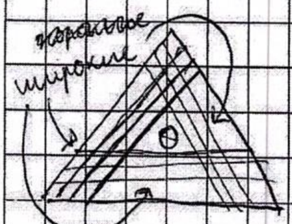


Рассмотрим оставшуюся сторону. На ней всего $3n+1$ точка из которых $3n-1$ еще не принадлежат ни одному множ-ву. Никакие 2 из них не могут принадлежать одному множ-ву, ведь тогда прямая станет хорошей ~~[illegible]~~, а также они не могут принадлежать множ-вам, которые содержатся на 2-х других сторонах. Значит каждая точка

ЗАДАЧА № 9. 9	ЛИСТ 2 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

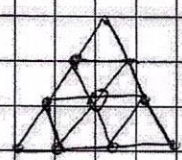
добавляет по 1-ому множеству и всего множеств будет $3n+1$. Противоречие.

Назовём прямую из разбиения широкой, если она лежит между стороной и центром (не включ) треугольника. ~~Заметим, что любая точка разбиения~~ кроме центра ~~принадлежит ровно 2-м широким прямым~~.



Докажем по индукции, что все широкие прямые хорошие (в треуг. со ст $3n$)

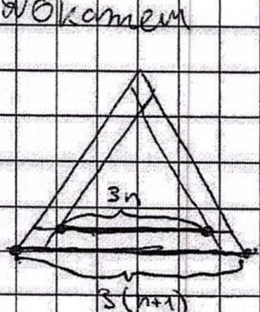
База: $n=1$



Широкие прямые — это стороны, а мы доказали, что они хорошие

Предположение: пусть утверждение верно для треуг. со ст. $3n$

Докажем для $3(n+1)$:

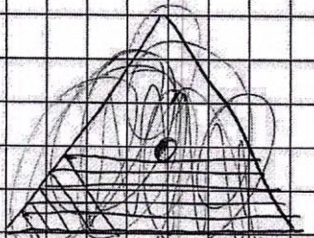


Стороны треугольника хорошие. Отрежем 1 слой маленьких треугольников с каждой стороны. Получим треугольник со стороной $3n$ (т.к. мы можем получить его

ЗАДАЧА № 9. 9	ЛИСТ 3 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-22 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

3 раза сократив сторону на 1). Теперь нам нужно разбить точки этого треугольника на 3n множеств, т.к. ни одна из них не может входить в множ-во лежащее на стороне исходного треугольника, всего множеств 3n+3, и мы уже использовали 3 множ-ва => по предположению индукции все широкие прямые ~~эт~~ получившегося треуг. будут хорошими. Значит и в исходном треуг. все широкие будут хорошими (т.к. у них один центр).

В треугольнике T тоже все широкие прямые — хорошие. Т.к. в разбиении хороших прямых ≥ множ-в, то т.к. в треугольн T 111 широких прямых, то все хорошие прямые — широкие.



Если точка принадлежит 2-м широким прямым, то у неё есть 2 варианта, к какому множ-ву относится, если к 1-ой — 1 вариант. Тогда у нас есть $3 \cdot 33^2$ точек, относящ

ЗАДАЧА № 9 . 9

ЛИСТ 4 ИЗ 4

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-9-2-22

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

к 2-м широким прямым => способов

разбить на множ-ва $2^{3\cdot 33^2} = 2^{3663}$

Ответ: $2^{3.663}$

арифметическая ошибка 6б