Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	9
ШИФР	М-9-16		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	~~0~~ 0	~~0~~ 0	
подписи членов жюри	А.А.	И.Ч. А.А.	М.Б.С. И.Ч.	А.А.	И.Ч.	

ЗАДАЧА № 9. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-9-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть в комонае В есть рыцарь. Тогда он победил двух рыцарей. Тогда рассмотрим что скажут эти рыцари. Они скажут, что проиграли лжецу, но такого не может быть. Значит в комонае В только лжецы V +2б.

Теперь пусть в А все рыцари. Тогда они все проиграли лжецам. Тогда, по принципу Дирихле, хотя бы один лжец из В победил хотя бы двух рыцарей (потому что в А людей больше чем в В), но тогда это не лжец, а рыцарь. Противоречие. Значит в А есть лжецы V+2б.

Пусть в А - и рыцари, и лжецы. Тогда заметим, что лжецы из А ~~говорят что~~ не проиграли лжецам из В. А так как рыцари им проиграли, то в В останутся после рыцарей хотя бы один лжец. Ну и первый же лжец из А победит всех из В. Также заметим,

ЗАДАЧА № 9.3	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

что после первого лжеца из A нету никаких рыцарей, потому что иначе они бы не сыграли со лжецами, а значит и не проиграли бы. Лжецы же, не сыграв с никем, не проиграли никому, поэтому соврут на вопрос о том, что проиграли. A победит.

Пусть в A - только лжецы. Тогда они выиграют „всухую", не потеряв никого. Тогда A победит.

После рассмотрения возможных случаев остался только вариант с победой A. Значит A и победит.

Ответ: победит команда A.

7б.

ЗАДАЧА № ~~9~~. 2 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-9-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Заметим, что трапеции симметричны относительно оси O_y ⇒ трапеции равнобедренные. +

Также заметим, что по св-ву трапеции точка пересеч. её диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой, и т.к. трапеции симм. относ. O_y, то прям. соедин. середины оснований — O_y +

Пусть Y - координата по y середины больш. осн., y - коорд. по y середины меньш. осн.

Найдем длину осн. трапеции через y:

Длина осн. $= |2x|$, где x - координата по x вершины отрезка, т.к. у нас парабола, то $x = \sqrt{y}$ ⇒ длина осн. $= 2\sqrt{y}$.

7б

Пусть A - координата по y точки пересеч. диагоналей. Тогда: $\frac{Y-A}{A-y} = \frac{2\sqrt{Y}}{2\sqrt{y}}$ ⇔ по св-ву пропорции $(Y-A)2\sqrt{y} = (A-y)2\sqrt{Y}$ ⇔ $2Y\sqrt{y} + 2y\sqrt{Y} = 2A\sqrt{y} + 2A\sqrt{Y}$ ⇔ $2\sqrt{y}\cdot Y(\sqrt{y}+\sqrt{Y}) = 2A(\sqrt{y}+\sqrt{Y})$ ⇒ ⇒ $\sqrt{y}\cdot Y = A$. Теперь заметим, что $2\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{Y} = K$ по условию ⇒ $\sqrt{y}\cdot Y = \frac{K}{4} = A$. Тогда если мы изменим y и Y так, чтобы произв. их осн. было K, то точка A пересеч. диагоналей останется неизменн.

ЗАДАЧА № 9.1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Заметим, что если мы составили квадрат $n \times n$, то прямоугольника $1 \times (n+1)$ там быть не может.

Докажем, что для $n=2$ нельзя составить $n \times n$: нужная площадь $-2 \cdot 2 = 4$, максимальная которую мы можем получить $- 1+2=3$. – База индукции

Докажем переход: если для a ~~нельзя составить~~ максимальная площадь меньше нужной, то для $a+1$ – тоже. Пусть b – ~~для~~ макс. площадь в $a \Rightarrow b+a+1$ – макс площадь для $a+1$.

Докажем: $(a+1)^2 > b+a+1$; 9.б.

$\Updownarrow$ ФСУ

$a^2+2a+1 > b+a+1$

$2a+1 > a+1$ для любых натуральных a (a у нас натурал по усл. задачи)

и $a^2 > b$ по предположению

$\Downarrow$

нерав-во верное

База и переход есть и доказаны $\Rightarrow$ индукция работает и мы не можем составить клетчатый квадрат площади больше 1. Ответ: не может

7б

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	9
ШИФР	М-9-2-16		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	3	~~X~~ 0	24
подписи членов жюри	А.А.	С.М.Б.		А.А.	А.А.	

ЗАДАЧА № 9.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть эти числа — $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$

Тогда $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=10$

Пусть без ограничений общности $a_1(a_2+\ldots+a_7)=$ $=a_2(a_1+\ldots+a_7)$. Заметим, что $a_2+\ldots+a_7=10-a_1$ и $a_1+a_3+\ldots+a_7=10-a_2 \Rightarrow a_1(10-a_1)=a_2(10-a_2)$;

$$\Updownarrow$$

$$10a_1-a_1^2=10a_2-a_2^2;$$

$$\Updownarrow$$

$$10(a_1-a_2)=(a_1-a_2)(a_1+a_2);$$

$$\Updownarrow \quad a_1\neq a_2 \Rightarrow a_1-a_2\neq 0$$

$$a_1+a_2=10.$$

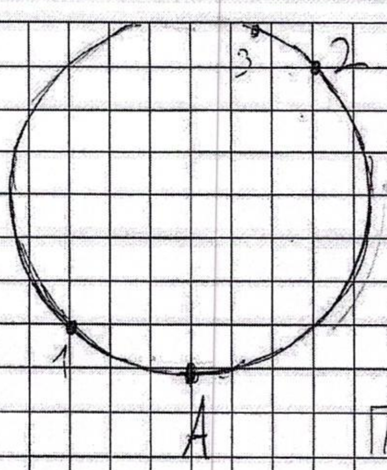
Теперь заметим, что $a_2(10-a_2)\neq a_i(10-a_i)$ если $i\neq 1$, так как тогда $a_2+a_i=10$ и $a_i=a_1$, но по условию все числа различны — противоречие. Значит есть только пары чисел в тетради, равных друг другу (не тройки, не четверки и т.д.)

Тогда без ограничений общности пусть $a_3(10-a_3)=$ $=a_4(10-a_4)$ и $a_5(10-a_5)=a_6(10-a_6) \Rightarrow a_3+a_4=10,\ a_5+a_6=10 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+a_7=10 \Rightarrow 10+10+10+a_7=10 \Rightarrow a_7=-20.$

Ответ: -20.

7б.

ЗАДАЧА № 9.7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Пусть тараканы начинают бег в точке A, первая встреча произошла в (.) 1, вторая - в (.) 2.

После первой встречи медленный таракан поменял своё направление а после второй менял своё направление быстрый. Теперь заметим что из точки 2 тараканы стартуют также, как из A, только в другом направлении. Значит и встретятся они на том же расстоянии от точки 2, что и 1 от A, только в другом направлении (в точке 3). Теперь из точки 3 они выходят так же, как из точки 1, но в других направлениях. Значит встретятся они в точке, расстояние от которой до 3 такое же, как и расстояние от 1 до 2, только в другую сторону. Т.е. расстояние от A до 2 равно расстоянию от 2 до новой точки в другом направлении. Значит это точка A. То есть

см. прод.

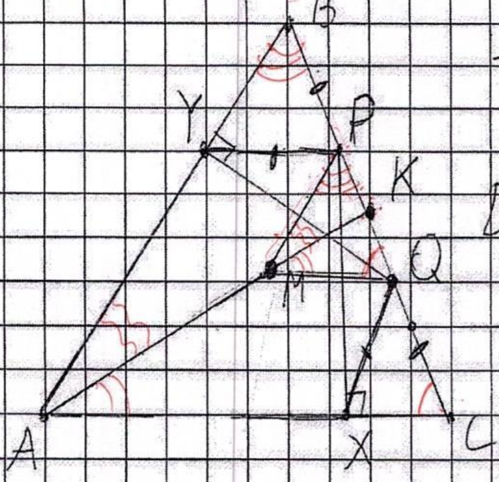
ЗАДАЧА № 9. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

на каждом 4-ом ходу мы возвращемся в точку А. 100 кратно 4. Значит и на 100-ом ходу мы вернемся в отмеченную точку т.е. встреча произойдет на расстоянии 0 от отмеченной точки.

Ответ: на расстоянии 0 от отмеченной точки.

7б.

ЗАДАЧА № 9.8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Дано: $BP=PQ=QC$

$\angle BYQ=\angle PXC=90^\circ$

Док-во: Проведём AK - медиана к стороне BC. Тогда точки A, M и K лежат на одной прямой.

Также $\frac{AK}{KM}=3$ по св-ву точки пересечения медиан.

Также заметим, что $KC=\frac{1}{2}BC$ и $QC=\frac{1}{3}BC \Rightarrow \frac{KC}{KQ}=3$.

$\left.\begin{array}{l}\frac{AK}{KM}=\frac{KC}{KQ}=3\\ \angle MKQ\text{-общий}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AKC \sim \triangle MKQ$ по 2-м сторонам и углу между ними $\Rightarrow \angle KMQ=\angle KAC \Rightarrow$

$\Rightarrow AC \parallel MQ \Rightarrow \angle MQK=\angle ACB$

Аналогично $\frac{BK}{KP}=3 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\frac{BK}{KP}=\frac{AK}{KM}\\ \angle AKB\text{-общий}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle MPK$ по 2-м сторонам и углу между ними. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PMK=\angle BAK \Rightarrow PM \parallel AB \Rightarrow \angle MPK=\angle ABK$.

Проведем XQ и YP. Заметим что это будут медианы в прямоугольных треугольниках PXC и BYQ соответственно. Тогда $\angle ACB=\angle QXC$ и $\angle ABC=\angle BYP$

Так как $AB \parallel PM$, $\angle BYP=\angle YPM=\angle MPK=\angle ABC \Rightarrow PM$-биссектриса $\angle YPK$; см. прод.

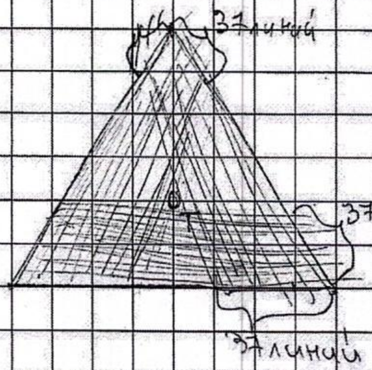
ЗАДАЧА № 9.8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Также, из-за того что $MQ \parallel AC$, $\angle QXC = \angle MQX = \angle ACB = \angle MQP \Rightarrow MQ$ – биссектриса $\angle PQX$.

Теперь заметим, что (.)M – точка пересечения биссектрис углов YPQ и $PQX \Rightarrow$ она равноудалена от YP и PQ, от PQ и от $XQ \Rightarrow$ она равноудалена от XQ и YP. Ч.Т.Д.

7б

ЗАДАЧА № 9. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Покажем, что единственный способ разбить точки на 111 линейных множеств возможен только при рисунке справа. (T - центр △T)

Попробуем переставить одну из линий, тогда останутся без множеств те точки, которые принадлежали передвинутой линии (для каждой линии это верно т.к. для каждой есть участок, где она ни с чем не пересекается). Попробуем добавить линию. Тогда одна уберется т.к. их всего 111. Если эти линии параллельны, то ничего не поменяется (или будет уже рассмотренный случай с перестановкой). Тогда пусть они не параллельны. Заметим, что у каждой линии есть участок, где она ни с чем не пересекается а на нём min 2 отмеченные точка (линии будут в общем набирать $\underbrace{112, 111, 110, 109, \ldots, 76}_{37\ линий}$ точек, а пересечения уберут 37+37=74 из них). Так как 2 точки принадлежат только

см. прод.

ЗАДАЧА № 9. 9	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-9-2-16 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

одной прямой, новая линия не сможет покрыть обе эти точки. Значит нам придется взять уже две линии, а для этого убрать ещё прямую, у нас снова образуются 2 точки и т.д. Тогда на каждом шаге у нас будет хотя бы 1 не принадлежащая ни одной линии точка.

почему они не попадут на добавл. прямые? ? не доказано

Тогда наш случай — единственный.

Заметим, что переставать множествах точки в мы можем только на пересечениях и единственным образом для каждой точки. Тогда случаев будет $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. Чему же равно n? n — это количество всех точек на пересечениях. Их будет $37 \times 37 \times 3 \Rightarrow$ способов будет $2^{37 \times 37 \times 3} = 2^{4107}$

Ответ: существует 2^{4107} способов.

Почему исх. прямые только такие?

3б.