Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА — КЛАСС: 11

ШИФР: М-11-51

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	7	0	28
подписи членов жюри	Кулешов	Кулешов	Кулешов	Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть Олег может составить квадрат со стороной $a>1$, тогда его площадь $a^2>1$, очевидно, что он не может брать прямоугольники со стороной больше, чем a, так как они не влезут в квадрат. Олег может взять не больше, чем все прямоугольники со сторонами от 1 до a, но их площадь $\frac{a^2+a}{2}$ и она должна быть не меньше a^2, решим неравенство:

$\frac{a^2+a}{2} \geq a^2$ $\quad -a^2+a \geq 0$ $\quad a^2-a \leq 0$

$a \in [0; 1]$, то есть a не превосходит 1, значит $a^2 \leq 1$, а по условию $a^2>1$, противоречие, значит Олег не может составить квадрат площади больше 1.

Ответ: не может.

4 Кузнецов

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Заметим, что для любого $x_1 > 1$ $p_1 \notin N$, так как $p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1} < x_1$, но $\frac{1}{x_1} < 1$ при $x_1 > 1$, значит $x_1 - \frac{1}{x_1} > x_1 - 1$, а между $x_1 - 1$ и x_1 нет натуральных чисел, при $x_1 = 1$ $p_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0 \notin N$.

Это даёт нам оценку, что $p_1 \notin N$, значит n (число натуральных p_i) ≤ 2023. +1

Взглянем на p_2:

$$p_2 = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = \frac{x_1^2-1}{x_1}\cdot\frac{x_2^2-1}{x_2} = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}\cdot\frac{(x_2-1)(x_2+1)}{x_2}$$

, довольно очевидно, что при $x_2 = x_1+1$ получаем $p_2 = \frac{(x_1-1)\cancel{(x_1+1)}}{\cancel{x_1}}\cdot\frac{\cancel{(x_1)}\cdot(x_1+2)}{\cancel{x_1+1}}$ при $x_1 \ne 1$, что натурально.

Теперь нетрудно заметить, что при $x_1 \ne 1$ и $x_i = x_{i-1}+1$ получаем $p_i = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}\cdot\ldots\cdot\frac{(x_1+i-2)(x_1+i)}{x_1+i-1}$, где поскольку для первых $(i-1)$ сомножителей сократятся знаменатели с первой скобкой числителя следующего сомножителя, а для последнего знаменателя в числителе есть вторая скобка предпоследнего сомножителя.

Получается, что $p_i \in N$ при $i \ne 1$ $n = 2023$

Ответ: 2023 числа при $x_1 \ne 1$ и $x_i = x_{i-1}+1$ V 7

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

К концу игры все точки будут закрашены, значит всего будет 100 пар точек, какие-то разноцветные, а какие-то одноцветные.

Сделаем оценку сверху: при каждом ходе Васи в кругу уже есть и закрашенные и белые точки, значит Вася может покрасить точку рядом с уже покрашенной точкой в такой же цвет, значит, он увеличит число одноцветных пар хотя бы на 1. Вася ходит 50 раз, а значит он может обеспечить себе 50 одноцветных пар. Оле остаётся не больше 50-ти разноцветных пар. V

2+1

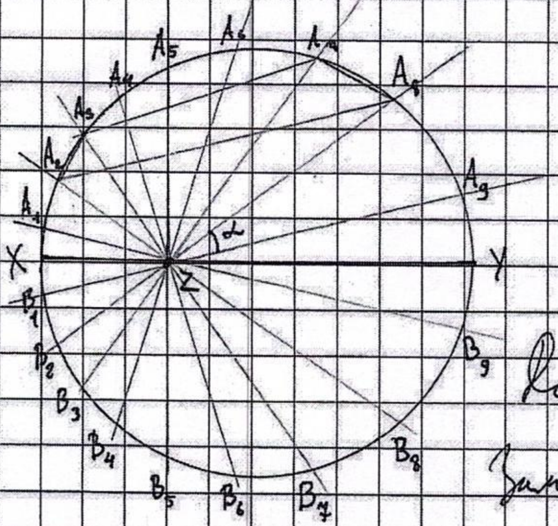
Сделаем оценку снизу: Начиная со второго хода Оли, она тоже может создавать по одной разноцветной паре, закрашивая ~~точку~~ рядом с уже закрашенной в другой цвет, таких ходов у Оли +2 49, значит она может обеспечить себе хотя бы 49 разноцветных пар.

Пусть перед последним ходом Васи в кругу 49 разноцветных пар. Оля может себе обеспечить такой исход. Пустая только одна точка, значит закрашенные образуют „отрезок", сравним цвета на его концах, ЗАДАЧА № 11. 3 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | M-11-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

то есть цвета, соседние с последней белой точкой, начнём из одного конца „отрезка" идти в другой, у нас 49 пар разноцветных точек, значит 49 раз цвет поменяется относительно стартового конца, и значит второй конец другого цвета, так как 49 нечетно. Раз соседние с последней белой точкой разноцветные, то при любом ходе Васи он создает одну одноцветную и одну разноцветную пару, разноцветных пар будет 50. Итак, количество разноцветных пар P ограничено вот так: $50 \geq P \geq 49$, но при 49-ти парах в итоге получаются 50 пар, значит $50 \geq P \geq 50$, т.е $P = 50$.

Ответ: 50 разноцветных пар, каждый ход со второго нужно ставить рядом с покрашенной точкой точку другого цвета.

ЗАДАЧА № 11. 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Дано: $\angle XZA_1 = \angle A_1ZA_2 = \ldots = \angle A_8ZA_9 = \angle A_9ZY = \alpha$

Доказать:

$S_{A_2A_3A_7A_8} = S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8}$

Док-во:

Заметим, что $S_{A_2A_3A_7A_8} = S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8} + S_{A_3ZA_7} - S_{A_2ZA_8}$

Достаточно доказать, что $S_{A_3ZA_7} = S_{A_2ZA_8}$. V+1

Сделаем симметрию относительно XY, точке A_i соответствует точка B_i и заметим, что $ZA_i = ZB_i$

$S_{A_3ZA_7} = \frac{ZA_3 \cdot ZA_7 \cdot \sin 4\alpha}{2}$, $S_{A_2ZA_8} = \frac{ZA_2 \cdot ZA_8 \cdot \sin 6\alpha}{2}$

$\sin 4\alpha = \sin 6\alpha$, так как $10\alpha = 180°$, а $\sin(\beta) = \sin(180° - \beta)$

тогда $\frac{S_{A_3ZA_7}}{S_{A_2ZA_8}} = \frac{ZA_3 \cdot ZA_7}{ZA_2 \cdot ZA_8}$ V 2

Для хорд A_8B_2, A_7B_3 пересекающихся в точке Z

? почему

справедливо, что $ZA_8 \cdot ZB_2 = ZA_7 \cdot ZB_3$, где $ZB_2 = ZA_2$, а $ZB_3 = ZA_3 \Rightarrow \frac{ZA_3 \cdot ZA_7}{ZA_8 \cdot ZA_2} = 1 \Rightarrow S_{A_3ZA_7} = S_{A_2ZA_8} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{A_2A_3A_7A_8} = S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8} + 0 = S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8}$

Ч.т.д. Вроде это неочевидно, также 2 балла. Хорошее

~~2б~~. 7

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-2-51		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	0	0	0	0	7
подписи членов жюри		Широкова	Широкова	Широкова	Широкова	

ЗАДАЧА № 11. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Да, смогут, например, так:

Гири Пети: 1; 2; 3; ...; 30

Гири Васи: 71; 72; 73; ...; 100

тогда 11 Петиных гирь $\leq \frac{(30+20)\cdot 11}{2} = 275$, а

12 Васиных $\geq \frac{(71+82)\cdot 12}{2} = \cancel{836}\ 918$, они никогда не будут равны

12 Петиных $\leq \frac{(30+19)\cdot 12}{2} = 294$

11 Васиных $\geq \frac{(71+81)\cdot 11}{2} = 836$ опять невозможно уравновесить

Ответ: да, смогут.

7

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	н-11-2-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть абсциссы точек A, B и C это a, b и c соответственно.

Итак, раз px^2+qx+r и x^2 пересекаются, то a и b - корни уравнения $(p-1)x^2+qx+r=0$, т.е.

$ab=\frac{r}{p-1}$, a $(a+b)=-\frac{q}{p-1}$

к чему?

Составим уравнения касательных в точках A и B:

в точке A $y=2a(x-a)+pa^2+qa+r$ (т.к. $f'(x)=(x^2)'=2x$, $f(x)=px^2+qx+r$ в точках a и b, т.к. это точки пересечения)

в точке B $y=2b(x-b)+pb^2+qb+r$

Они пересекаются в точке C, тогда

$2a(c-a)+pa^2+qa+r=2b(c-b)+pb^2+qb+r$

решаем для c это нехлопотное уравнение, получаем

$c=\frac{2(a+b)-p(a+b)-q}{2}=(a+b)\frac{2-p}{2}-\frac{q}{2}$

найдём ординату C: $2a\left(\frac{2a+2b-pa-pb-q}{2}-a\right)+pa^2+qa+r=$

$=a\cdot(2b-p(a+b)-q)+pa^2+qa+r=$

$=2ab-pa^2-pab-qa+pa^2+qa+r=(2-p)ab+r$

Но для C так же справедливо, что её ордината это pc^2+qc+r, т.е.

$(2-p)ab+r=p\left(\frac{(a+b)(2-p)-q}{2}\right)^2+\frac{q(a+b)(2-p)-q^2}{2}+r$

решим это уравнение

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$p\frac{(a+b)^2(2-p)^2-2q(p-1)(a+b)(2-p)+(p-2)q^2}{4}=(2-p)ab$$

$$(2-p)\left(\frac{p(a+b)^2(2-p)-2q(a+b)(p-1)-q^2-4ab}{4}\right)=0$$

$p=2$, заметим, что $a+b=\frac{-q}{p-1}$, а $ab=\frac{r}{p-1}$

$$(2p-p^2)\cdot\frac{q^2}{(p-1)^2}+q^2-\frac{4r}{p-1}=0$$

$p\neq1$, т.к. была бы одна точка пересечения, а их две.

$$2pq^2-p^2q^2+(p-1)^2q^2-4r(p-1)=0$$

$$2pq^2-p^2q^2+p^2q^2-2q^2p+q^2-4rp-4r=0$$

$$4rp=q^2-4r$$

$p=\frac{q^2-4r}{4r}$ и $p\neq1$, а так же $p=2$, но $p\neq\frac{q^2-4r}{4r}$ тоже подходят.

Ответ: $p\neq1$, любое другое число возможно при $p=\frac{q^2-4r}{4r}$

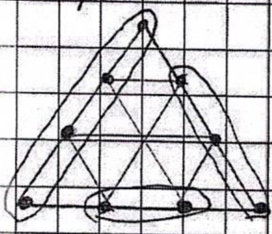
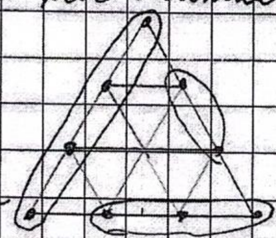
0 баллов

ЗАДАЧА № 11. 9 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-2-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

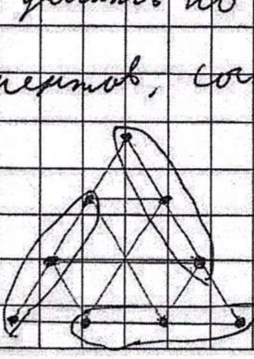
Ответ: два ответа, если считать разные положения множеств одного набора множеств за разные способы, то ответ: $\sum\limits_{k=0}^{37} 2^k \cdot \frac{((37-k)\cdot 3)!}{((37-k)!)^3}$ <что-то порядка 10^{50}, если считать за разные способы только качественно разные наборы множеств и не учитывать положения этих множеств в конкретном разбиении, то ответ: 2^{37}.

Начнём с первого случая и рассмотрим сначала треугольник со стороной 3 (нетрудно заметить, что только в треугольниках со стороной кратной 3 центр попадает в вершину)

В данном случае мы считаем разбиения:

 и  за разные способы.

Нужно отметить, что помимо разбиения на множества с количествами элементов от 2 до $n+1$, где n - длина стороны есть возможность делать по 3 множества с одинаковым количеством элементов, составляя из них треугольник таким образом:



всегда есть только 2 варианта такого разбиения для конкретного подтреугольника

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-51 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Итак, рассмотрим разбиения, где все множества разные, тогда каждое множество параллельно одной из трёх сторон, но может быть не более $\frac{n}{3}$ множеств, параллельных одной стороне, тогда для треугольника со стороной $3n$ есть $\frac{3n!}{2n!\,n!}\cdot\frac{2n!}{n!}\cdot\frac{1}{n!}=\frac{3n!}{(n!)^3}$ способов разбиения такими методами (буквально это количество способов составить последовательность из n единиц, двоек и троек), но мы

нет, т.к. точка разные!

так же можем двумя способами составить 3 одинаковых множества, т.е кол-во способов будет $\frac{3n!}{(n!)^3}+2\cdot N$, где N - кол-во способов для треугольника со стороной $3n-3$, тогда для треугольника со стороной 3 кол-во способов $\frac{3!}{(1!)^3}+2$, для стороны 6 $\left(\frac{3!}{(1!)^3}+2\right)\cdot 2+\frac{6!}{(2!)^3}$, а для стороны $3n$: $\sum_{k=0}^{n} 2^k\cdot\frac{((n-k)\cdot 3)!}{((n-k)!)^3}$

Если же нас интересуют только качественно разные наборы множеств, то это эквивалентно тому, чтобы выбрать, для каких подтреугольников сделать разбиение на 3 равных множества и разбить все оставшиеся на разные множества, это 2^{37}, так как в треугольнике со стороной 111 37 подтреугольников. даже это не верно!