Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-43		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	~~2~~ 7	0	~~16~~ 21
подписи членов жюри	Кулешов	Широкова	Кулешов	Слоу Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть мы смогли составить квадрат $a \times a$, где $a > 1$. В этом квадрате могут встречаться только прямоугольники со стороной $\leq a$. Рассмотрим суммарную площадь таких прямоугольников:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + a = \frac{a(a+1)}{2}$$

Чтобы такой квадрат существовал, суммарная площадь должна быть больше либо равна площади квадрата:

$$\frac{a(a+1)}{2} \geq a^2$$

$$a^2 - a \leq 0$$

$$a(a-1) \leq 0$$

$0 \leq a \leq 1$ – неверно, так как $a > 1$

Значит такой квадрат составить нельзя.

Ответ: нет.

ЗАДАЧА № 11. 2 | ЛИСТ 2 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим p_1:

$$p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}$$

$НОД(x_1-1; x_1) = НОД(x_1; 1) = 1$

$НОД(x_1+1; x_1) = НОД(x_1; 1) = 1$

$\Rightarrow$ Если $x_1 > 1$, то дробь несократима.

Если $x_1 = 1$, то $p_1 = 0$, т.е. p_1 никогда не равно натуральному числу, поэтому максимальное кол-во натуральных чисел не больше 2023. оценка

Пример: $x_1 = 2, x_2 = 3, \ldots, x_i = i+1, \ldots, x_{2024} = 2025$

В этой послед-ти $x_{i+1} = x_i + 1$, $x_{i-1} = x_i - 1$

$$p_i\ (i \geq 2) = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1} \cdot \frac{(x_2-1)(x_2+1)}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{(x_i-1)(x_i+1)}{x_i}$$

все знаменатели сократятся, поэтому $p_i \in \mathbb{N}\ (i \geq 2)$

Ответ: 2023

7 8

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 3 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть в итоге оказалось x зелёных и $100-x$ синих, тогда кол-во пар разноцветных носков равно $x(100-x)$ Не те пары считаем

Рассмотрим $f(x)=x(100-x)=-(x-50)^2+2500$

То есть чем ближе x к 50 или чем меньше разница между кол-вом синих и кол-вом зелёных, тем больше пар разноцветных носков.

После каждого хода Оли Вася может увеличить разницу на 1.

Докажем, что Оля сможет добиться того, что на 99 ходе разница будет равна 1, по индукции.

База: на 1 ходу разница равна 1.

Шаг: на i ходе x одного цвета и $x+1$ другого:

i	$x;\ x+1$		ход Оли
$i+1$	$x+1;\ x+1$	$x;\ x+2$	ход Васи
$i+2$	$x+2;\ x+1$	$x+1;\ x+2$	ход Оли

Верно

Получается на 99 ходе минимальная разница равна 1, так как 0 быть не может из-за нечётности числа 99.

ЗАДАЧА № 11 . 3	ЛИСТ 4 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

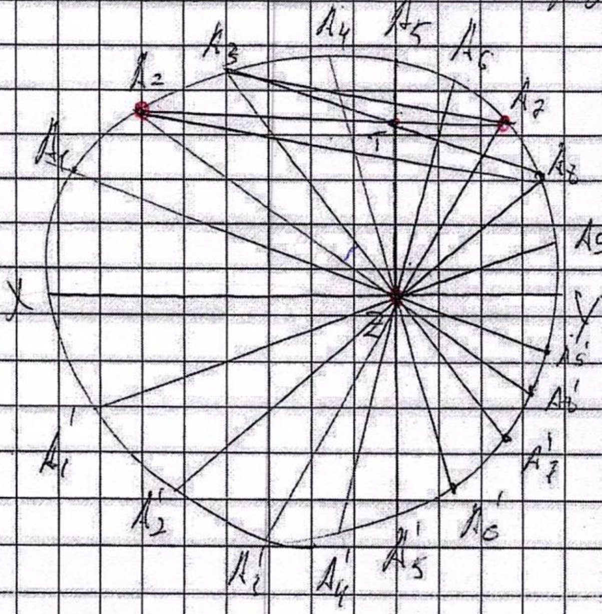
Тогда минимальная разница на 100 ходу будет равна 2 (так как Вася увеличит её на 1).
Одного цвета 49, другого 51.

Кол-во пар равно $49 \cdot 51 = 2499$

Ответ: 2499

Если бы между ними разница была равна 0, то суммарно было бы закрашено чётное кол-во точек, что невозможно на 99 ходу.

ЗАДАЧА № 11. 4	ЛИСТ 5 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



1) Продлим $A_1Z, A_2Z, \dots, A_9Z$ до пересеч. с окружностью в $A_1', A_2', \dots A_9'$.

Пусть A_2A_7 пересекает A_5Z в T.

$\angle A_3A_2A_7 = \angle A_3A_7'A_7$

A_7 симметрично A_7' относительно XY, A_5 тоже симметрично A_5' относительно $XY \Rightarrow A_7A_7' \parallel A_5A_5' \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A_3A_2A_7 = \angle A_3A_7'A_7 = \angle A_3ZA_5 \cancel{= 36^\circ \Rightarrow}$

$\angle A_3A_2T = \angle A_3ZT \Rightarrow A_2A_3TZ$ – вписанный $\Rightarrow$

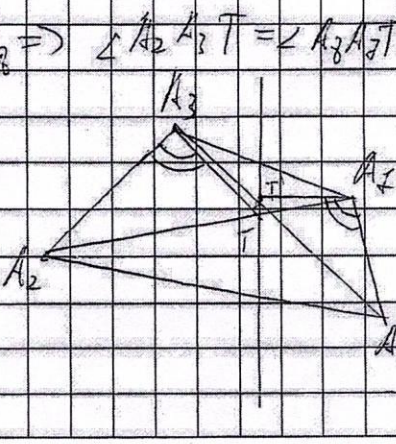
$\Rightarrow \angle A_2TA_3 = \angle A_2ZA_3 = 18^\circ$

Аналогично если мы проведём A_3A_8 и обозначим точку пересечения как T', то $\angle A_7T'A_8 = 18^\circ$

$\angle A_3A_2A_7 = \angle A_7A_8A_3$, $\angle A_2TA_3 = \angle A_7T'A_8 \Rightarrow \angle A_2A_3T = \angle A_8A_7T'$

$\Rightarrow \angle A_2A_3A_8 - \angle TA_3T' = \angle A_2A_7A_8 + \angle T'A_7T$

$\angle T'A_3T + \angle T'A_7T = 0^\circ \Rightarrow T' = T$



2) $S_{A_2A_3A_7A_8} = \frac{1}{2} \sin\angle A_2TA_3 \cdot A_2A_7 \cdot A_3A_8$

ЗАДАЧА № 11. 4	ЛИСТ 6 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$A_2A_7^2 = A_2Z^2 + A_7Z^2$ (из ΔA_2ZA_7) ✓

$A_3A_8^2 = A_3Z^2 + A_8Z^2$ (из ΔA_3ZA_8) ✓

$$S^2_{A_2A_3A_7A_8} = \frac{\sin^2\angle A_2TA_3}{4}\cdot A_2A_7^2\cdot A_3A_8^2 = \frac{\sin^2 18^\circ}{4}\cdot A_2A_7^2\cdot A_3A_8^2$$

$$\left(S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 18^\circ\cdot A_2Z\cdot A_3Z + \frac{1}{2}\sin 18^\circ\cdot A_7Z\cdot A_8Z\right)^2 =$$

$$= \frac{\sin^2 18^\circ}{4}\left(A_2Z^2\cdot A_3Z^2 + 2A_2Z\cdot A_3Z\cdot A_7Z\cdot A_8Z + A_7Z^2\cdot A_8Z^2\right)$$

$A_2Z\cdot A_8Z = A_3Z\cdot A_7Z \Rightarrow A_2Z\cdot A_3Z = A_2Z\cdot A_7Z$

(степень точки) хотелось бы объяснения.. (из симметрии)

$$\left(S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8}\right)^2 = \frac{\sin^2 18^\circ}{4}\left(A_2Z^2\cdot A_3Z^2 + A_2Z^2\cdot A_8Z^2 + A_3Z^2\cdot A_7Z^2 +\right.$$

$$\left.+ A_7Z^2\cdot A_8Z^2\right) = \frac{\sin^2 18^\circ}{4}\left(A_2Z^2 + A_7Z^2\right)\left(A_3Z^2 + A_8Z^2\right) =$$

$$= \frac{\sin^2 18^\circ}{4}\cdot A_2A_7^2\cdot A_3A_8^2 = S^2_{A_2A_3A_7A_8}$$

$$S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8} = S_{A_2A_3A_7A_8}$$

20б.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-2-43

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	4	0	0	18
подписи членов жюри				Широков Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Да, может, например:

Петя: 1г, 2г, 3г, ..., 30г

Вася: 71г, 72г, ..., 100г

Тогда максимальный вес из 12 гирь у Пети:

$19+20+\ldots+30 = \frac{49 \cdot 12}{2} = 294$

А минимальный вес из 11 гирь у Васи:

$71+72+\ldots+81 = \frac{152 \cdot 11}{2} = 836$

Получается, что минимальный вес у Васи из 11 гирь больше, чем максимальный у Пети из 12 гирь, значит уравновесить 12 Петиных и 11 Васиных не получится. Уравновесить 11 Петиных и 12 Васиных тем более не получится, так максимальный вес Пети только уменьшится, а минимальный вес Васи только увеличится.

Ответ: да.

75

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$

Из условия о параболах можно составить систему:

$$\begin{cases} px_A^2 + qx_A + r = y_A = x_A^2 \\ px_B^2 + qx_B + r = y_B = x_B^2 \\ px_C^2 + qx_C + r = y_C \end{cases}$$

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

Угловой коэффициент касательной в точке равен значению производной в этой точке.

В точке A: $2x_A$, но с другой стороны угловой коэффициент можно найти из координат A и C:

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{px_C^2 + qx_C + r - px_A^2 - qx_A - r}{x_C - x_A} = p(x_A + x_C) + q \quad (x_A \neq x_C)$$

Получилось, что $p(x_A + x_C) + q = 2x_A$

Аналогично с B: $p(x_B + x_C) + q = 2x_B$

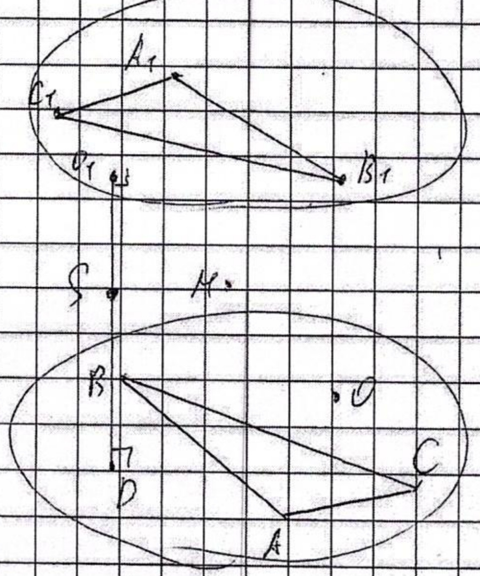
Вычитаем 2 из 1: $p(x_A - x_B) = 2(x_A - x_B)$ $\quad x_A \neq x_B$

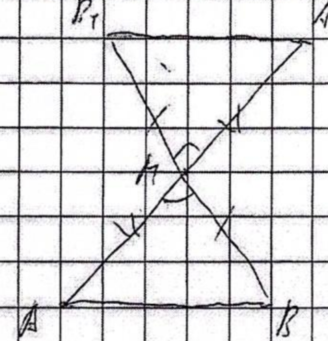
$p = 2$

Ответ: $p = 2$

7 б

ЗАДАЧА № 11. 8	ЛИСТ 3 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)





$\Delta ABM = \Delta A_1B_1M$ (по двум сторонам и углу) $\Rightarrow AB = A_1B_1$ и $AB \parallel A_1B_1$

Аналогично $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC \parallel A_1C_1$

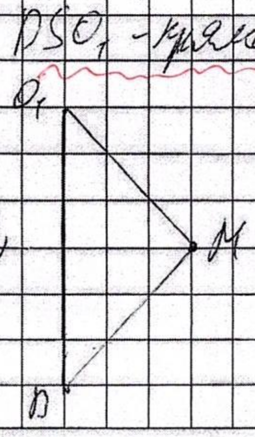
Значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ и $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

При этом M является центром симметрии для ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ и M равноудалена от (ABC) и $(A_1B_1C_1)$.

Пусть S - центр ω, O_1 - центр описанной около $\Delta A_1B_1C_1$ окружности. Из симметрии $MO = MO_1$. 2б

S проецируется на $(A_1B_1C_1)$ в O_1, так как O_1 - центр описанной около $\Delta A_1B_1C_1$ окружности $\Rightarrow DSO_1$ - прямая 2б очев?

Рассмотрим (DMO_1):



Так как M равноудалена от (ABC) и $(A_1B_1C_1)$, а DO_1 перпендикулярна к обеим плоскостям

$MO_1 = MD \Rightarrow MO = MD$

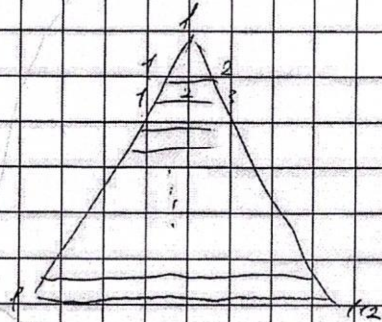
не очевидно!

4б.

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 4 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Посчитаем кол-во всех отмеченных точек:

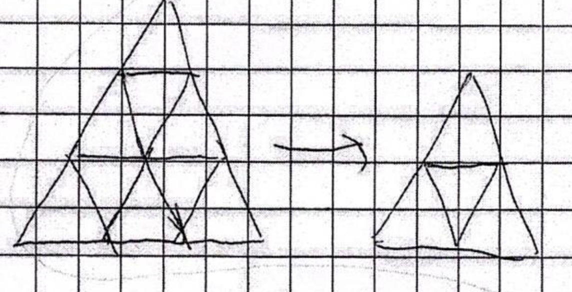
$1+2+\ldots+112-1=\frac{114\cdot 111}{2}$



Будем разбивать эти точки на множества, строя прямые, содержащие данные точки.

Тогда первая проведенная прямая содержит ≤ 112 точек, вторая ≤ 111, третья ≤ 110 ..., последняя ≤ 2 точек

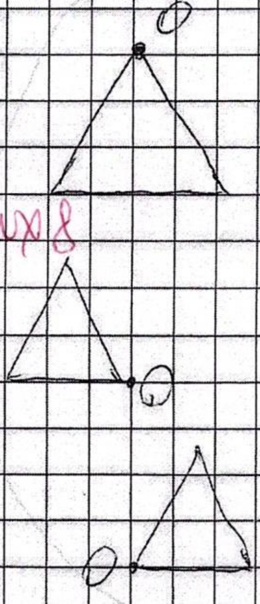
Суммарно эти прямые содержат $\leq 2+3+\ldots+112=\frac{114\cdot 111}{2}$, и ровно столько, сколько всего отмеченных точек, а значит первая ~~где~~ содержит ровно 112 точек, вторая ровно 111 точек и так далее. Это значит, что на ~~каждом~~ первом ходе мы выбираем одну из 3 сторон треугольника, затем у нас остаётся треугольник со стороной на один меньше и мы также выбираем одну из сторон и так далее.



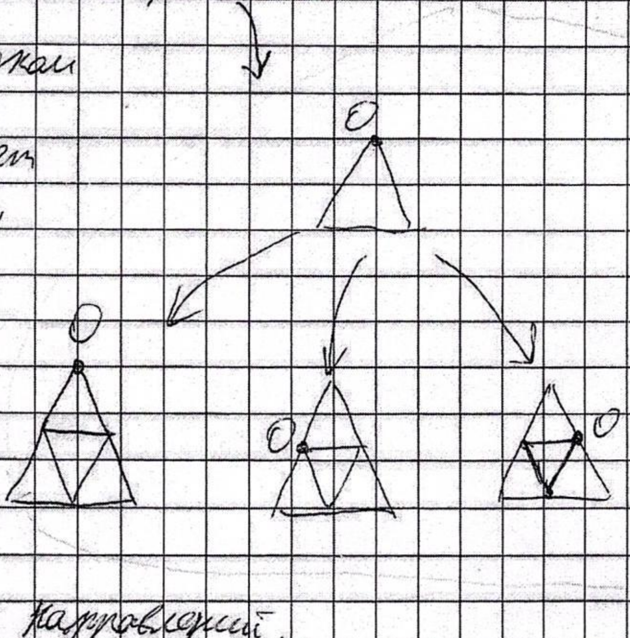
Но когда на одной из сторон треугольника будет

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 5 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

центр изначального треугольника, не получится выбрать эту сторону, так как в ней на одну точку меньше. Значит в конце останется треугольник со стороной 1 и с вершиной в центре изначального треугольника. Ориентация при этом сохраняется как у изначального треугольника, поэтому из 6 возможных подходят только 3.



Теперь каждый способ мы будем строить с конца: есть 3 возможных направления для ~~добавле~~ увеличения треугольника и каждое такое направление задаёт новый способ. В одном направлении нужно будет сделать 36 „увеличений", в двух других по 37.



Тогда для каждого начального треугольника нужно выбрать порядок направлений.

ЗАДАЧА № ~~11~~. 9	ЛИСТ ~~6~~ ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

По есть из 110 „увеличений" нужно выбрать 36 для одного направления из оставшихся 74 для выбрать 37 для другого направления, а в оставшихся будет оставшееся направление: $C_{110}^{36} \cdot C_{74}^{37} = \frac{110! \cdot 74!}{36! \cdot 74! \cdot 37! \cdot 37!} = \frac{110!}{36! \cdot 37! \cdot 37!}$

посчитанное по примере

Так как ~~нужно~~ начальных треугольников было 3, итоговый ответ: $\frac{3 \cdot 110!}{36! \cdot (37!)^2}$

Ответ: $\frac{3 \cdot 110!}{36! \cdot (37!)^2}$

0 баллов

ЗАДАЧА № 11. 10	ЛИСТ 7 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-43 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Нам нужно добиться того, чтобы в среднем за каждую ~~ход~~ знаменатель вырос в 2 раза. Разложим начальную 1 как:

$$1 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2}$$

На первом ходе ~~Вася~~ Петя отделяет $\frac{1}{2}$ и $\underbrace{\text{оставшуюся сумму}}_{\text{тоже }\frac{1}{2}\text{ тоже }\frac{1}{2}}$, тогда Вася либо оставляет равные числа нельзя!

$\frac{1}{2}$ (тогда за один ход знаменатель вырос вдвое и Петя уже $\frac{1}{2}$ раскладывает в сумму), либо оставляет остальную сумму, тогда Петя уже отделяет $\frac{1}{4}$ (тогда за 2 хода знаменатель вырос вчетверо) и так далее.

Разложение для произвольного x:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot 2^m} + \frac{1}{x \cdot 2^m} + \frac{1}{x \cdot 2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{x \cdot 2}$$, где m - кол-во оставшихся ходов.

~~Тогда за $n-1$ ход~~ В конце, когда останется $\frac{1}{x \cdot 2^m} + \frac{1}{x \cdot 2^m} + \frac{1}{x \cdot 2^{m-1}}$, Петя отделяет $\frac{1}{x \cdot 2^m}$, и в любом случае знаменатель будет $x \cdot 2^m$.

То есть за $n-1$ минуту знаменатель будет равен 2^n.