Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА — КЛАСС: 11

ШИФР: М-11-42

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	7	0	21
подписи членов жюри						

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 11.1

~~Пусть Олег составил какой-то квадрат. Обозначим за n площадь наибольшую площадь~~

Пусть Олег взял какой-то набор прямоугольников и составил из него квадрат. Обозначим ~~площадь~~ сторону не равную 1 наибольшего по площади прямоугольника из набора Олега за n, тогда можно сказать что площадь квадрата $S \geq n^2$. С другой стороны, S - это сумма площадей всех прямоугольников из набора Олега. Эта сумма не превосходит сумму площадей набора всех прямоуг. ~~со сторонами~~ от 1×1 до $1\times n$, т.е. $1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Таким образом, можно сказать что

$$n^2 \leq S \leq \frac{n(n+1)}{2}, \text{ т.е. } n^2 \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

Решая, получаем: $2n^2 \leq n^2+n \Rightarrow$

$$\Rightarrow n^2-n \leq 0 \Rightarrow n(n-1) \leq 0, \text{ т.е.}$$

$n \in [0;1]$. Т.е. n может быть только 1 и площадь квадрата может быть лишь 1.

Ответ: нет.

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№11.2

Преобразуем выражение:

$$p_i = \left(\frac{x_1^2-1}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2^2-1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x_i^2-1}{x_i}\right)$$

или же

$$p_i = \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_i-1)(x_i+1)}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_i}$$

p_i будет натуральным, если в знаменателе выражения будет стоять 1, иначе говоря, если все числа из знаменателя можно будет сократить с множителями числителя.

Докажем, что ~~число~~ кол-во натуральных чисел среди $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}$ не может превосходить 2023.

Рассмотрим p_1:

$p_1 = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}$, ясно что пары чисел (x_1-1) и x_1, а также (x_1+1) и x_1 — взаимнопросты, поэтому x_1 не сократится и p_1 — не натур. число

Приведём пример на 2023 натур. числа:

Пусть $x_{i+1} = x_i+1 \Rightarrow p_1 = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}$ — не натур. число

$$p_2 = \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)}{x_1\cdot x_2} = \frac{(x_1-1)\cdot x_2\cdot x_1\cdot(x_2+1)}{x_1\cdot x_2} = (x_1-1)\cdot(x_2+1)$$ — натур. число

$$p_3 = p_2\cdot\left(\frac{(x_3-1)(x_3+1)}{x_3}\right) = \frac{(x_1-1)(x_2+1)(x_3-1)(x_3+1)}{x_3} =$$

$$= \frac{(x_1-1)\cdot x_3(x_3-1)(x_3+1)}{x_3} = (x_1-1)(x_3-1)(x_3+1)$$ — натур. число

см. продолж. на след. ⇒

Всероссийская олимпиада школьников **Региональный этап**

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

$$P_4 = P_3 \cdot \frac{(x_4-1)(x_4+1)}{x_4} = \frac{(x_1-1)(x_3-1)(x_3+1)(x_4-1)(x_4+1)}{x_4} =$$

$\cancel{(x_1-1)(x_3-1)(x_3+1)}$

$$= \frac{(x_1-1)(x_3-1)\cdot x_4 (x_4-1)(x_4+1)}{x_4} = (x_1-1)(x_3-1)(x_4-1)(x_4+1)$$

натур. число

далее аналогично...

$$P_{2024} = \frac{(x_1-1)(x_3-1)(x_4-1)(x_5-1)\cdot\ldots\cdot(x_{2022}-1)(x_{2023}+1)(x_{2023}-1)\cdot(x_{2024}-1)(x_{2024}+1)}{x_{2024}} = \frac{(x_1-1)(x_3-1)\cdot\ldots\cdot(x_{2022}-1)\cdot x_{2024}(x_{2023}-1)\cdot(x_{2024}-1)\cdot(x_{2024}+1)}{x_{2024}} = (x_1-1)(x_3-1)\cdot\ldots\cdot(x_{2023}-1)\cdot(x_{2024}-1)\cdot(x_{2024}+1)$$

натур. число

~~Пример достаточно~~

Пример в числах: $x_1 = 2$, $x_{i+1} = x_i + 1$.

$P_1 = \frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$ – не натур

$P_2 = \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$ – натур

$P_3 = \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4} = 15$ – натур.

$$P_{2024} = \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2022\cdot 2024\cdot 2023\cdot 2025\cdot 2024\cdot 2026}{2025!} =$$

$$= \frac{2024!\cdot 2026}{2} = 2024!\cdot 1013$$

Ответ: 2023 числа

+ 7б

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№11.3

Начиная со второго хода, Оля каждый раз закрашивая точку, может создавать новую пару разноцветных точек. Ей достаточно каждый ход закрашивать какую-то точку рядом с уже закрашенной точкой в цвет, отличающийся от этой закрашенной точки. Таким образом, Оля может гарантировать себе 49 пар

Ответ: 49 пар.

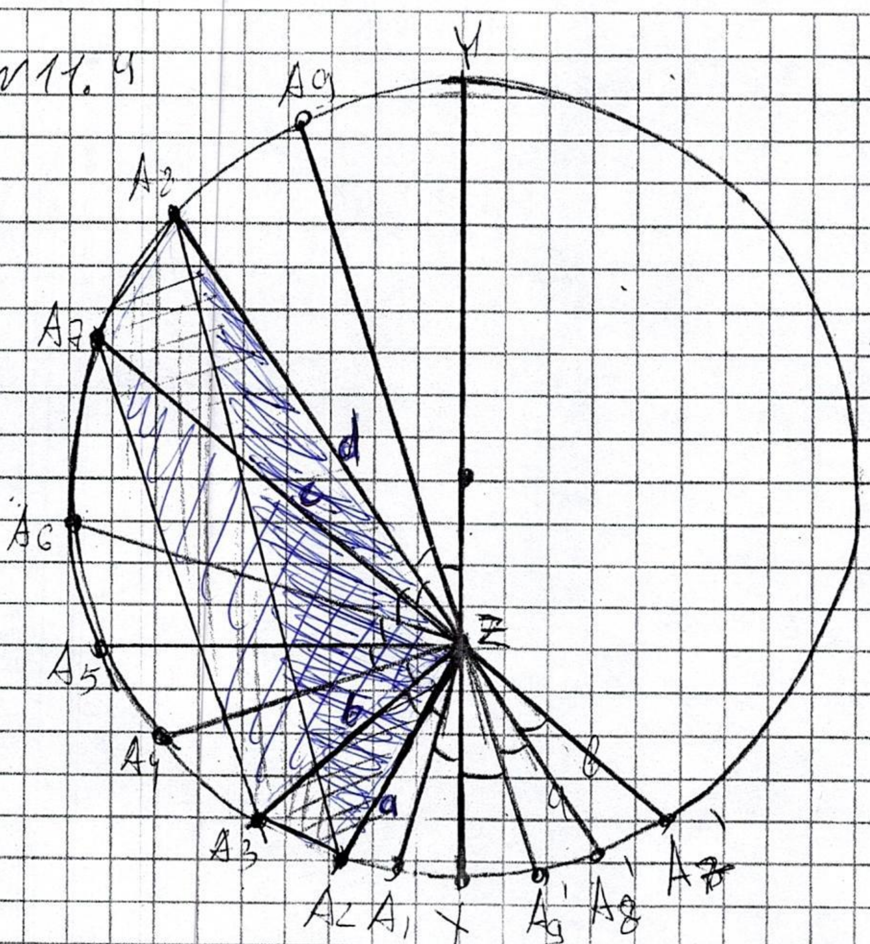
−

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ		**КЛАСС**	
ШИФР			

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№11.4



$S_{A_2A_3A_7A_8} = S_{A_3ZA_7} + S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8} -$

$- S_{A_1ZA_8} =$

Пусть $A_2Z = a$, $A_3Z = b$, $A_7Z = c$, $A_8Z = d$

Тогда $S_{A_2A_3A_7A_8}$ можно записать как:
(по формулам площади через sin):

$S_{A_2A_3A_7A_8} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - 18^\circ) + \frac{1}{2}ab \sin 18^\circ + \frac{1}{2}cd \sin 18^\circ -$

$- \frac{1}{2}ad \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + 18^\circ)$

По формулам приведения:

(см продолж. на след.) ⇒

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ **КЛАСС**

ШИФР

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

$S_{A_2A_3A_7A_8} = \frac{1}{2}bc\cdot\cos 18^\circ + \frac{1}{2}ab\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\sin 18^\circ cd -$

$- \frac{1}{2}ad\cos 18^\circ$, где $\frac{1}{2}ab\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\sin 18^\circ cd =$

$= S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8}$, т.е.:

$S_{A_2A_3A_7A_8} = S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8} + \frac{1}{2}\cos 18^\circ(bc - ad)$ (*)

Продлим A_9Z, A_8Z и A_7Z до пересеч. с окр. по др. стор. от ос. ч и получим хорды A_9A_9', A_8A_8' и A_7A_7'

Из симметрии относительно ос. ч ясно, что

$A_2Z = A_8'Z = a$ и $A_3Z = A_7'Z = b$

Т.к. $A_8A_8' \cap A_7A_7' = $ т. Z, то $A_8Z\cdot ZA_8' = A_7Z\cdot ZA_7' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ иначе говоря $ad = bc$, или же

$ad - bc = 0$

Подставим в формулу (*) и получим, что

$S_{A_2A_3A_7A_8} = S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8} + \frac{1}{2}\cos 18^\circ\cdot 0 \Leftrightarrow$

иначе говоря

$S_{A_2A_3A_7A_8} = S_{A_2ZA_3} + S_{A_7ZA_8}$ ч.т.д.

(*) 15

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-2-42

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	0	0	14
подписи членов жюри		Широкова	Широкова	Широкова	Широкова	

ЗАДАЧА № 11. 6 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-2-42 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: да

Пусть у Пети гири массой от 1 до 30 г, а у Васи гири массой от 71 г до 100 г.

Суммарный вес 11 гирь Пети $\le \frac{20+30}{2}\cdot 11 = 275$

Суммарный вес 12 гирь Васи $\ge \frac{71+82}{2}\cdot 12 = 918$

То есть первая часть условия выполняется (какие бы 11 гирь не взять у Пети, их сумм. вес всегда ≤ 275, а у Васи в любом случае сумм. вес 12 гирь ≥ 918, т. е. уравновесить не получится)

Суммарный вес 12 гирь Пети $\le \frac{19+30}{2}\cdot 12 = 294$

Суммарный вес 11 гирь Васи $\ge \frac{71+81}{2}\cdot 11 = 836$

Аналогично и вторая часть условия выполняется.

75

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-42 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть $A(a_x; a_y)$, $B(b_x; b_y)$, $C(c_x; c_y)$

Уравнение касательной к G_2 в точке A:

$$y = 2ax - a^2$$

Уравнение касательной к G_2 в точке B:

$$y = 2bx - b^2$$

Чтобы найти c_x, нужно приравнять два этих уравнения:

$$2a c_x - a^2 = 2b c_x - b^2 \Rightarrow c_x = \frac{a_x + b_x}{2}$$

Для нахождения c_y подставим c_x в одно из уравнений касательных:

$$c_y = 2a c_x - a^2 \Rightarrow c_y = a_x b_x$$

Из того, что G_1 и G_2 пересекаются в точках A и B, получаем, что

$$a_y = a_x^2 \quad \text{и} \quad b_y = b_x^2,$$ а также

$$p a_x^2 + q a_x + r = a_y$$

$$p b_x^2 + q b_x + r = b_y$$

Так как точка C принадлежит G_1, получим:

$$p c_x^2 + q c_x + r = c_y$$

(продолжение на след. листе)

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-42 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p a_x^2 + q a_x + r = a_x^2 \\ p b_x^2 + q b_x + r = b_x^2 \\ p\left(\frac{a_x+b_x}{2}\right)^2 + q\left(\frac{a_x+b_x}{2}\right) + r = a_x b_x \;\Big|\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p a_x^2 + q a_x + r = a_x^2 \\ p b_x^2 + q b_x + r = b_x^2 \\ p\cdot\frac{(a_x+b_x)^2}{2} + q(a_x+b_x) + 2r = 2a_x b_x \end{cases}$$

Вычтем первое и второе из третьего получим:

$$p\cdot\frac{(a_x+b_x)^2}{2} - pa_x^2 - pb_x^2 + q(a_x+b_x) - q(a_x+b_x) + 2r - 2r = \\ = 2a_x b_x - a_x^2 - b_x^2$$

или же:

$$p\left(\frac{a_x^2 + 2a_x b_x + b_x^2 - 2a_x^2 - \cancel{2b_x^2}}{2}\right) = -(a_x - b_x)^2$$

иначе говоря:

$$p\cdot\left(\frac{-(a_x-b_x)^2}{2}\right) = -(a_x-b_x)^2$$

т.к. A и B - различные точки, a_x и b_x - различные числа, поэтому можно сказать, что: $p\cdot\frac{1}{2}=1$ ~~или~~ или же, что $p=2$

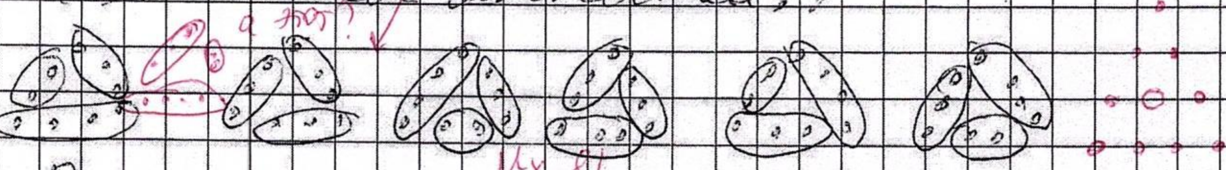
Ответ: $p=2$.

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-42 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Рассмотрим аналогичный треугольник со стороной 3, для которого проделаны те же манипуляции, но с числом 3.

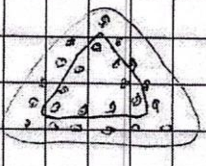
Существует 6 способов, чтобы разбить точки на 3 маленьких множества:

а этот?



их 8!

Далее рассмотрим треугольник со стороной 6. Точки такого треугольника можно разбить на то, что разобраны ранее а для оставшегося аналогично прошлому 6 способов разбиения на 3 мн. множества.



Таким образом будет $6 \cdot 6 = 6^2$ разбиений на 6 мн. множеств.

Продолжая увеличивать ~~?~~ сторону треугольника на 3 мы дойдем до $111 = 3 \cdot 37$. Значит для него будет 6^{37} способов разбиения на 111 мн. множеств.

Ответ: 6^{37}.