Всероссийская олимпиада школьников | Региональный этап

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА

КЛАСС: 11

ШИФР: М-11-39

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	0	0	14
подписи членов жюри		Широкова		Кулешов		

ЗАДАЧА № 11.1 | ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-39 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Предположим, что составить такой квадрат возможно. Обозначим длину его стороны за x, тогда его площадь равна x^2, т.е. сумма площадей прямоугольников, его составляющих, равна x^2.

С другой стороны, бо́льшая сторона каждого использованного прямоугольника не превышает x. Так как меньшая сторона всегда равна 1, $S_i \leq x$.

Все S_i различны, значит Олег может использовать максимум x прямоугольников. Прямоугольник с площадью x тоже только один:

- если Олег его использует, получаем суммарную площадь $x + \sum_{i=1}^{x-1}(S_i < x)$, которая меньше, чем $x + (x-1)x = x^2$ $\rightarrow$ противоречие.
- если же Олег не использует его, суммарная площадь равна $\sum_{i=1}^{x-1}(S_i < x) < (x-1)x < x^2$ $\rightarrow$ противоречие

Следовательно, посылка не верна. Ответ: нет.

7

7б.

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-39 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Последовательность, в которой

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $\forall (i > 2, i \le 2024, i \in \mathbb{N})$

$x_i = p_{i-1}$

содержит [redacted] 2023 натуральных числа,

поскольку $p_i = p_{i-1} \cdot \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)$,

$p_1 = \frac{3}{2}$

$p_2 = \frac{8}{3} p_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4$

$\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{x_i^2 - 1}{x_i} = \frac{p_{i-1}^2 - 1}{p_{i-1}}$

$p_i = p_{i-1} \cdot \frac{p_{i-1}^2 - 1}{p_{i-1}} = p_{i-1}^2 - 1$ — натуральное число, если p_{i-1} является натуральным числом.

$\Rightarrow$ все числа, начиная с p_2 — натуральные.

Докажем, что все числа последовательности не могут быть натуральными:

рассмотрим первый член посл-ти:

$p_1 = \frac{x_1^2 - 1}{x_1}$ — предположим, является натуральным числом,

тогда $p_1 x_1 = x_1^2 - 1 \iff \cancel{x_1^2 - p_1 x_1 - 1 = 0}$ не имеет решений, т.к. $x_1^2 - 1$ не делится на x_1.

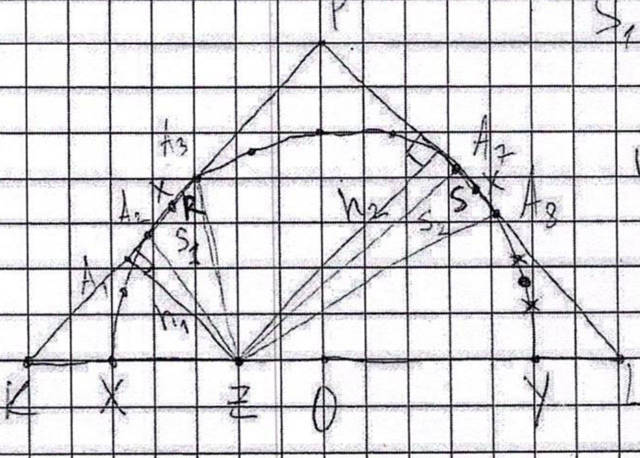
$\cancel{D = p_1^2 + 4}$

$\cancel{x_1 = \frac{p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + 4}}{2}}$

А значит, наиб. кол-во натуральных чисел в этой последовательности равно $\boxed{2023}$.

У

ЗАДАЧА № 11. 4	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-39 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



$S_1 = S_{A_2A_3Z}$; $S_2 = S_{A_7A_8Z}$

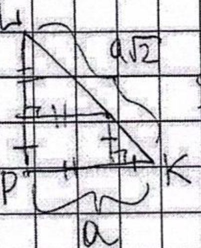
$\cup XA_1 = \cup A_1A_2 = \cup A_2A_3 = \cup A_3A_4 =$
$= \cup A_4A_5 = \cup A_5A_6 = \cup A_6A_7 =$
$= \cup A_7A_8 = \cup A_8A_9 = \cup A_9Y =$
$= \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$ – нет

$\angle A_3A_2A_8 = \frac{1}{2}\cup A_3A_8 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 18^\circ = \frac{1}{2}\cup A_2A_7 = \angle A_7A_8A_2 =$
$= 45^\circ$ ⇒ противолежащие им углы $\angle AA_3A_7$ и $\angle A_8A_2A_3$ равны $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. ⇒ $A_3A_7 \parallel A_2A_8$

$\triangle OXA_2 = \triangle OYA_8$ по двум сторонам и углу между ними. ⇒ $\rho(A_2; XY) = \rho(A_8; XY)$

⇒ $A_2A_8 \parallel XY \parallel A_3A_7$ ⇒ $\triangle PKL$ – п/у, $\angle K = \angle L = 45^\circ$ $(= \angle A_3A_2A_8)$

$PL = PK = a$



$S_1 + S_2 = h_1 \cdot \frac{1}{2}A_2A_3 + h_2 \cdot \frac{1}{2}A_7A_8 =$

$A_2A_3 = A_7A_8 = x$ (дуги равны)

$= \frac{1}{2}x(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}ax$

Середины отрезков A_2A_3 и A_7A_8 также являются серединами PK и PL соотв.-но, поскольку серединный перпендикуляр из O можно к каждой стороне провести единственным способом. ⇒ RS – средняя линия

ЗАДАЧА № 11. 4

ЛИСТ 2 ИЗ 2

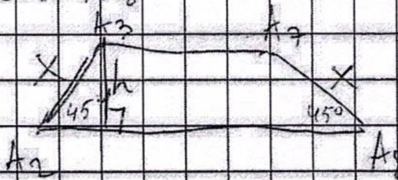
(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-11-39

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

в ~~т~~ равнобокой трапеции $A_2A_3A_7A_8$.

$S_{A_2A_3A_7A_8} = RS \cdot h$, где $h = x\sin 45° = \frac{x\sqrt{2}}{2}$,



$RS = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

$S_{A_2A_3A_7A_8} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{1}{2}ax =$

$= S_1 + S_2$, что и требовалось доказать.

Ок.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-2-39		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	~~7~~ 0	7	0	0	14
подписи членов жюри						

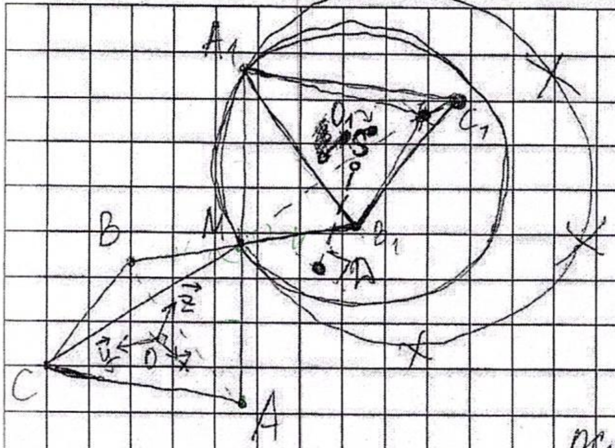
ЗАДАЧА № 11.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-2-39 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Да, такое возможно.

Например, если раздать Васе гири массами от 71г. до 100г. включительно, а Пете — от 1г. до 30г. включительно. Тогда любые 11 Петиных гирь суммарно не превышают $\overset{330}{11\cdot 30}$г, и в то же время любые 12 Васиных гирь всегда превышают $\overset{852}{12\cdot 71}$г, т.е. их масса всегда больше $852г. > 330г. = 11\cdot 30г.$

Аналогично любые 12 ~~В~~ Петиных гирь в сумме не превосходят $12\cdot 30г = 360г.$, тогда как любые 11 Васиных гирь превосходят ~~8~~ $11\cdot 71г = 781г$; а значит с такими наборами условие выполняется.

ЗАДАЧА № 11. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-239 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Введём систему координат с центром в точке O, осью $\vec{z}$, перпендикулярной плоскости (ABC) и осями $\vec{x}$ и $\vec{y}$, образующими ~~[illegible]~~ плоскость (ABC).

Обозначения: x, y, z — координаты точки M, известны

x_0, y_0, z_0 — координаты центра сферы (точка S)

По углу и двум сторонам равны:

$\triangle AMB$ и $\triangle A_1MB_1$; $\triangle AMC$ и $\triangle A_1MC_1$;

$\triangle BMC$ и $\triangle B_1MC_1$

$\Rightarrow \angle MBC = \angle MB_1C_1$; $\angle MBA = \angle MB_1A_1$

$\Rightarrow BC \parallel B_1C_1$; $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow (A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

Центр сферы лежит на перпендикуляре, восстановленном в ~~точке~~ центре окружности O_1, описанной около $\triangle A_1B_1C_1$. В силу симметрии относительно точки M, точка O_1 имеет координаты $\vec{M} + (\vec{M} - \vec{O}) = 2\vec{M} = (2x; 2y; 2z)$.

Т.к. $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$, этот перпендикуляр и есть SD

ЗАДАЧА № 11. 8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-39 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

т.е. $x_0 = 2x$; $y_0 = 2y$. | Это требует осознания

Точка D, в свою очередь, имеет координаты $(x_0; y_0; 0) = (2x; 2y; 0)$.

Наконец, $OM = \sqrt{(0-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

и $DM = \sqrt{(2x-x)^2+(2y-y)^2+(0-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

т.е. $MO = MD$, что и требовалось доказать.

7

Славва За

ЗАДАЧА № 11.7	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-39 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = px^2 + qx + r \end{cases}$$

$px^2 + qx + r = x^2$

$(p-1)x^2 + qx + r = 0$ — должно иметь два решения $\Rightarrow p \neq 1$, т.к. при $p=1$ решение либо отсутствует, либо одно, (либо беск. много.)

$D = q^2 - 4(p-1)r > 0$

Уравнения касательных к точкам

$A(A_x; A_x^2)$ и $B(B_x; B_x^2)$:

$$y = 2A_x x + (A_y - 2A_x^2) \iff y = 2A_x x - A_x^2$$

$$y = 2B_x x + (\underbrace{B_y}_{} - 2\underbrace{B_x^2}_{B_y}) \qquad y = 2B_x x - B_x^2$$

они пересекаются в точке C:

$$2A_x C_x - A_x^2 = 2B_x C_x - B_x^2 \quad \Big| \cdot(-1); + C_x^2$$

$$C_x^2 - 2A_x C_x + A_x^2 = C_x^2 - 2B_x C_x + B_x^2$$

$$(C_x - A_x)^2 = (C_x - B_x)^2$$

$C_x - A_x = C_x - B_x$ или $C_x - A_x = B_x - C_x$

тонкий момент

$A_x = B_x$

Не верно по условию.

$$\boxed{C_x = \frac{A_x + B_x}{2}}$$

Т.к. C лежит на G_2,

$pC_x^2 + qC_x + r = C_y$

$pA_x^2 + qA_x + r = A_x^2$

ЗАДАЧА № 11.7

ЛИСТ 2 ИЗ 2

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-11-2-39

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$C_y = 2A_xC_x - A_x^2 \Rightarrow \begin{cases} pC_x^2 + qC_x + r - (2A_xC_x - A_x^2) = 0 \\ pA_x^2 + qA_x + r - A_x^2 = 0 \end{cases}$$

C_y - ?

$$(p-1)C_x^2 + qC_x \underbrace{-2A_xC_x + C_x^2 + A_x^2}_{(C_x - A_x)^2} = (p-1)A_x^2 + qA_x$$

$$(p-1)(C_x^2 - A_x^2) + q(C_x - A_x) + (C_x - A_x)^2 = 0$$

$$(C_x - A_x)((p-1)(C_x + A_x) + q + (C_x - A_x)) = 0$$

$\neq 0$

$$pC_x + pA_x - 2A_x + q = 0$$

очевидно, но тонко

$$p = \frac{2A_x - q}{A_x + C_x} = \frac{2A_x - q}{A_x + \frac{A_x + B_x}{2}} = \frac{4A_x - 2q}{3A_x + B_x}$$

$$C_y = p\left(\frac{A_x + B_x}{2}\right)^2 + q\frac{A_x + B_x}{2} + r$$

✓?

$$(p-1)A_x^2 - qA_x + r = 0$$

не доведено C_y

можно же было ещё дописать уравнение $pB_x^2 + qB_x + r = B_x^2$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$

нашёл молодец, что выписал нужную систему хотя бы частично

С не нашел.

Слава За.