Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А			КЛАСС	1	1
ШИФР	М	-	1	1	-	3	3								

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	2	0	0	16
подписи членов жюри	Широкова Кил	Широкова	Кил Широкова	Широкова	Широкова	

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть можно составить квадрат $n \times n$ (сторона n), где ~~т~~ $1 < n \leq 2024$. Ясно, что если $n = 1$, то площадь равна 1, что запрещено по условию, ~~если~~. Так для квадрата со стороной n могут быть выбраны n прямоугольников для составления квадрата от 1×1 до $1 \times n$ соответственно (включительно).
Прямоугольники со большей стороной больше n не войдут в квадрат.
Давайте располагать эти прямоугольники друг под другом ~~ниже~~, тогда полностью закрытым будет лишь ряд, где оказался прямоугольник $1 \times n$ (оказывается покрыта только ~~половина~~ часть площади для квадрата). Если $n > 2024$, то понятно, что не получится покрыть, ~~даже~~ ~~половину площади~~. так как S ещё увеличится, а прямоугольники не добавятся.

Пояснение про площадь: сумма S-ей прям-ов от 1×1 до $1 \times n$ $= 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} < \underbrace{n \cdot n}_{\text{площадь квадрата}}$ ~~$A \times n$~~ $2n^2$;

$\frac{n(n+1)}{2} < n^2$,

$\frac{n^2 + n - 2n^2}{2} < 0$,

$\frac{n^2(-n+1)}{2} < 0$,

$n_1 = 0 \quad n_2 = 1$ $\quad - \; 0 \; + \; 1 \; -$ т.е. верно для $n > 1$.

$\boxed{\text{Ответ: не может.}}$

7

ЗАДАЧА № 11. 2 | ЛИСТ 2 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)$$

$$p_i = \left(\frac{x_1^2-1}{x_1}\right)\left(\frac{x_2^2-1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x_i^2-1}{x_i}\right)$$

$$p_i = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}\cdot\frac{(x_2-1)(x_2+1)}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{(x_i-1)(x_i+1)}{x_i}$$

← верный пример

Пусть $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4,\ \ldots,\ x_{2024}=2025$

Тогда p_i будут конструироваться следующим образом:

$$p_{2024} = \frac{1\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2023\cdot 2025}{2024}\cdot\frac{2024\cdot 2026}{2025}$$

Как видим, в такой конструкции ~~что~~ знаменатель каждой следующей дроби (множитель) соответствует „второй" множитель числителя предыдущей дроби => они сократятся, а „2" из первой дроби соответствует „2" в числителе 2-ой дроби => тоже сократятся, так для $\forall p_i$, где $i>1$ все знаменатели сократятся => p_i будет равно произведению натуральных чисел, значит будет натуральным. Так 2023 p_i уже точно могут быть натуральными.

• продолжение на следующей странице →

Обоснование сомнительное

ЗАДАЧА № 11.2

ЛИСТ 3 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-11-33

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Докажем, что p_1 не может быть натуральным

$\Rightarrow \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}$ - не натуральное

$x_1 - \frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_1} < 1 \Rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1}$ - не натуральное

1) $(x_1-1) \not\vdots\, x_1$, т.к. меньше

2) $x_1+1 \,\vdots\, x_1$, только при $x_1 = 1$, ведь при большем x эти 2 числа отличаются меньше, чем в 2 раза (последовательные числа), но при $x_1 = 1$ $(x_1-1) = 0 \Rightarrow p_1 = 0$ - не натуральное

Тогда наименьшее число натуральных p_i равно 2023.

Оценка +

Ответ: 2023.

5 баллов

75

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 4 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

стратегия Васи

Так как начинает Оля, то Вася после каждого её хода может красить соседнюю точку от какой-либо точки в друг такой же цвет, делая тем самым новую одноцветную пару, пусть не может, но тогда все точки уже закрашены.

Всего пар соседних точек 100 (между 100 точками 99, минуя и ещё 1 между 100ой и 1ой) тогда т.к. ходов Васи 50 => что 50 пар точно будут одноцветными.

Х ситуацию, когда Вася точно может сделать 2-е одноцветные пары за 1 ход: когда одинаковые цвета идут через 1 и ход Васи. Такое может получиться, когда Вася ~~стал~~ красит в противоположный цвет точку через 2

(К) (С) ○ ○ (З) ход Васи, тогда при любые действия ~~Васи~~ Оли у Васи получится 1им ходом сделать 2 одноцветные пары, но после Оля может через 2 непокрашенные (-) ~~поставить~~ покрасить в такой же цвет, и тоже →

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 5 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

получит 2 разноцветные пары за 1 ход.

При чём точки и приросты ~~будущего~~ не могут быть всегда компенсированы, т.к

$\underbrace{(100 - 4)}_{96} : 3 = 32\ (+1)$ = 33, т.к 1-ую чку тоже

можно для Васи превратить в 4-ую конструкцию

33 - нечётно. ~~Вся~~ Оля может пытаться ломать все и дробя четвёрки, но при этом

она будет терять подобные приросты =>

Оля сможет сделать разноцветных

не более $50 - 1 = 49$ соседних пар точек

Ответ: 49.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-2-33		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	1	0	0	15
подписи членов жюри	Куликов		Широкова	Куликов	Куликов	

ЗАДАЧА № 11. 6 | ЛИСТ 1 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-2-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть учитель дал Васе гири с массами: от 1 до 30 включительно, а Пете с массами от 71 до 100 включительно. Но тогда максимальный вес 12 гирь Васи меньше минимального веса 11 гирь Пети:

$\underbrace{19 + \ldots + 30}_{12 \text{ гирь}} < \underbrace{71 + \ldots + 81}_{11 \text{ гирь}}$, что очевидно,

т.к если сопоставить веса 19 и 71, 20 и 72 ..., до 29 и 81 суммарная разница весов много больше, чем двенадцатая гиря Васи с весом в 30 г. Т.к вес и кол-во гирь Васи могут только уменьшатся, а Пети соответственно только увеличиваться, то уравновесить, конечно, не получится, значит приведённый пример годится.

считаю, что снижать за отсутствие более слабого случая нет причины.

Ответ: да, сможет.

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Обозначим, что в решении обозначения: A, B, C – стоит понимать, как координаты соответствующих точек по оси x.

Уравнение касательной в точке к графику функции:

$y_{кас} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Напишем ур-ия касательных в (·) A и B соотв-о к $y=x^2$.

$y_1 = 2A\cdot(x-A) + A^2 = 2Ax - A^2$

$y_2 = 2Bx - B^2$

Т.к. они п-ся в (·) $C \Rightarrow 2A\cdot C - A^2 = 2B\cdot C - B^2$;

$$2C(A-B) = A^2 - B^2;$$
$$2C(A-B) = (A-B)(A+B);$$
$$(2C-(A+B))(A-B) = 0$$

$\boxed{2C = A+B}$ $\qquad$ $A-B=0$

Если $A-B=0 \Rightarrow A=B$, но тогда это 1 точка, что противоречит условию.

Т.к. x^2 и px^2+qx+r п. в (·) A и B; (·) C лежит на G_1:

$$\begin{cases} (1)\ A^2 = pA^2 + qA + r & \text{(п-ие в (·) } A) \\ (2)\ B^2 = pB^2 + qB + r & \text{(п-ие в (·) } B) \\ (3)\ 2A\cdot C - A^2 = pC^2 + qC + r & \text{((·) } C \text{ лежит на } G_1 \text{ и кас. в (·) } A) \\ (4)\ 2B\cdot C - B^2 = pC^2 + qC + r & \text{((·) } C \text{ лежит на } G_1 \text{ и кас. в (·) } B) \end{cases}$$

ЗАДАЧА № 11.7	ЛИСТ 3 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-2-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Сложим правые части 1-ого и 2-го равенства с левыми 3-его и 4-ого равенства, а левые части 1-ого и 2-ого соответственно с правыми частями 3-его 4-ого равенств, получим равенство:

$$pA^2 + qA + \cancel{r} + pB^2 + qB + \cancel{r} + 2A\cdot C - A^2 + 2B\cdot C - B^2 =$$
$$= A^2 + B^2 + 2pC^2 + 2qC + \cancel{2r};$$

Воспользуемся ранее полученным равенством $2C = A+B \Rightarrow C = \frac{A+B}{2}$ (подставим вместо „C"):

$$p(A^2+B^2) + q(A+B) + 2C(A+B) - 2A^2 - 2B^2 = 2pC^2 + 2qC;$$
$$p(A^2+B^2) + \cancel{q(A+B)} + 2\cdot\frac{(A+B)}{2}\cdot(A+B) - 2A^2 - 2B^2 = 2p\frac{(A+B)^2}{4} + \cancel{2q\frac{(A+B)}{2}};$$
$$p(A^2+B^2) + A^2 + 2AB + B^2 - 2A^2 - 2B^2 = p\frac{(A+B)^2}{2};$$
$$p(A^2+B^2 - 0{,}5A^2 - AB - 0{,}5B^2) = A^2 - 2AB + B^2;$$
$$2p(0{,}5A^2 - AB + 0{,}5B^2) = 2(A-B)^2; \quad | \text{ домножим на } 2$$
$$p(A-B)^2 = 2(A-B)^2;$$
$$p = \frac{2(A-B)^2}{(A-B)^2} = 2 \quad ((A-B)^2 \neq 0, \text{ что}$$

показано ранее)

Ответ: $p = 2$.

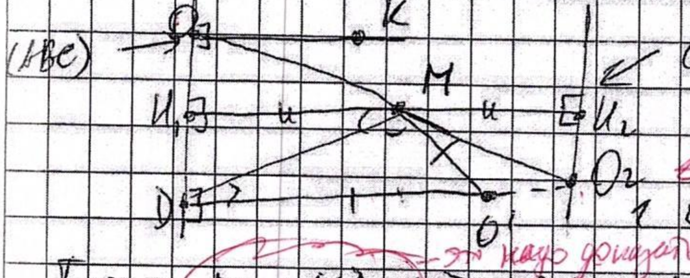
ЗАДАЧА № 11. 8	ЛИСТ 4 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Д $\triangle MA_1B$ и $\triangle MAB$ – они равны по $\angle$ между AA_1 и BB_1 и по 2м сторонам $AM = A'M$; $BM = B'M$ (по условию), тогда $\angle$-ы при AB и A_1B_1 попарно равны $\Rightarrow$ $AB \parallel A_1B_1$, тогда $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, т.к. содержат $\parallel$ друг другу прямые тогда высота, опущенная на (ABC) = $\frac{1}{2}$ расстояния между $\parallel$-ыми плоскостями.

это неверный факт!

Получим конструкцию (где $(\cdot)O'$ – центр описанной сферы, $(\cdot)K$ – п-ние $\perp^{\kappa(ABC)}$ из $(\cdot)O$ и тетраэдра $MABC$.

это как?



$O'M = O'D$, т.к. принадлежат 1 сфере.

почему D, O' и O_2 на одной прямой? (будет ниже)

это надо доказать!

Тогда $MO = MD \Leftrightarrow OH_1 = H_1D \Rightarrow MH_1$ – медиана и бис-са в $\triangle$-е MOD, т.к. $\triangle O'MD$ – р/б $\Rightarrow \angle O'DM = \angle DMO'$, т.к. $MH_1 \parallel O'D$ ($\perp$ одной плоскости) $\Rightarrow \angle O'DM = \angle H_1MD$

Значит $\angle H_1MO$ делится пополам MD – бис-са. ?!

И в плоскости $A_1B_1C_1$ $\exists$ $(\cdot)O_2$ – симметричная относительно M, значит O_2 – центр опис окр-сти $\triangle A_1B_1C_1$

не доказано.

ЗАДАЧА № 11 . 8	ЛИСТ 5 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М - 11 - 2 - 33 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Но $O'O_2 \perp A_1B_1C_1$ т.к O' - центр описанной сферы ($\perp$ из $(\cdot) O_2$ к $(A_1B_1C_1)$ - ГМТ центра описанной сферы)

Тогда из $(\cdot) O'$ проведены 2 $\perp$-а к $\parallel$ плоскостям $\Rightarrow$ они $\parallel$ или совпадают, они совпадают, т.к у них есть 1 общая точка O'. т.к O и O_2 симметричны $\Rightarrow$ $H_1O = O_2H_2$ $\Rightarrow$ $\triangle OH_1M = \triangle O_2H_2M$ (прямой угол и 2 прилежащие стороны). Тогда т.к $H_1M \parallel DO_2$

← почему $MH_1 = MH_2$?

и $OM = MO_2$ (из равенства $\triangle$) $\Rightarrow$ по Тh Фалеса $OH_1 = H_1M$, из чего $\Rightarrow$ что OMD - р/б и $OM = OD$, ч.т.д.

1) не доказано, что $ABC \parallel A'B'C'$

2) не доказано, что ~~H_1~~ ~~H_2~~ $MH_1 = MH_2$

3) M - середина OO_2 выводится из — , а значит не доказано

4) доказан только факт, что D, O', O_2 на одной прямой (~~...~~ основываясь на 1), но поскольку на рисунке должна быть одна плоскость (сечение), что так же не обоснована, уже д-ва прямоты $\angle O_2DO$, этот факт считать установленным также нельзя.

1