Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-32		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	2	0	16
подписи членов жюри		Широкова	Кулешов	Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Предположим, что можно собрать такой квадрат. Тогда он будет со стороной n и площадью n^2, где n – натуральное число и $n \leq 2024$ (т.к. самый большой прямоугольник размерами 1×2024). Следовательно, все прямоугольники должны быть по площади меньше или равны n, иначе сторона квадрата будет больше n. Самую большую площадь из таких прямоугольников можно получить, если сложить все прямоугольники площадью от 1 до n. Т.е. площадь равна $1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Также площадь равна $n^2 \Rightarrow \frac{n\cdot(n+1)}{2} = n^2 \Rightarrow n^2+n = 2n^2 \Rightarrow n^2-n=0 \Rightarrow n(n-1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n=0$ или $n=1 \Rightarrow n^2=0$ или $n^2=1$. По условию площадь должна быть больше $1 \Rightarrow$ такой квадрат составить нельзя.

Ответ: нет. 7б.

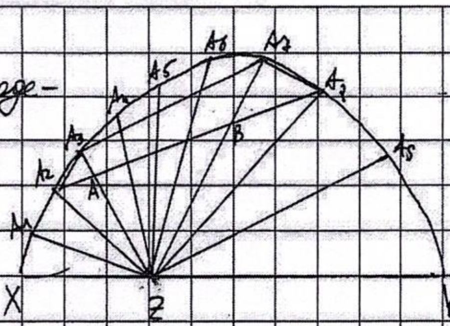
ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Первое число p_1 точно не будет натуральным, т.к. $p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2-1}{x_1} = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}$. $\Rightarrow (x_1-1)$ не делится на x_1 и (x_1+1) не делится на $x_1 \Rightarrow p_1$ не натуральное. Теперь рассмотрим последовательность $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$, где каждое число больше предыдущего на 1. Пусть $x_1 = n$, тогда $x_2 = n+1$, $x_3 = n+2, \dots$, $x_{2024} = n+2023$. Рассмотрим число p_2: $p_2 = \left(n - \frac{1}{n}\right)\left((n+1) - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(n-1)(n+1)}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+2)}{n+1}$. Заметим, что знаменатель полностью сокращается. Также если рассмотреть следующие числа из набора $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$ заметно, что знаменатель дроби $\frac{x_i^2-1}{x_i}$ содержится в числителе предыдущей дроби $\frac{(x_i-1)^2-1}{x_i-1} = \frac{(x_i-2)\,x_i}{x_i-1}$. То есть все числа, кроме p_1, будут натуральными, т.к. знаменатели всех домножаемых дробей сокращаются $\Rightarrow$ в такой последовательности будет 2023 натуральных числа, поскольку p_1 натуральным не является (Знаменатель первой дроби содержится в числителе второй дроби, поэтому он тоже сократится)

Ответ: 2023 числа.

75

ЗАДАЧА № 11 . 4	ЛИСТ 1 ИЗ ___ (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Т.к. в четырёхугольнике $A_2A_3A_7A_8$ содержатся части $\triangle A_2A_3Z$ и $\triangle A_7A_8Z$ ($\triangle A_2A_3A$ и $\triangle BA_7A_8$) $\Rightarrow$ нужно доказать, что $\triangle A_2AZ + \triangle BZA_8 = A_3ABA_7$. Рассмотрим $\triangle A_2ZA_8$ и $\triangle A_3ZA_7$. У них есть общая часть $\triangle ABZ$ $\Rightarrow$ нужно доказать, что $S_{\triangle A_2A_8Z} = S_{\triangle A_3A_7Z}$. $S_{\triangle A_2A_8Z} = \frac{1}{2}\sin 108^\circ \cdot A_2Z \cdot A_8Z$, $S_{\triangle A_3A_7Z} = \frac{1}{2}\sin 72^\circ \cdot A_3Z \cdot A_7Z$. $\sin 72^\circ = \sin 108^\circ$ $\Rightarrow$ нужно доказать, что $A_2Z \cdot A_8Z = A_3Z \cdot A_7Z \Rightarrow \frac{A_8Z}{A_7Z} = \frac{A_3Z}{A_2Z} \Rightarrow \triangle A_2A_3Z \sim \triangle A_7A_8Z$.

2 Кузнецов

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ **МАТЕМАТИКА** КЛАСС 11

ШИФР М-11-2-32

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	0	7	0	0	14
подписи членов жюри						

ЗАДАЧА № 11.6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Да, сможет. Он должен дать Пете 30 гирек с массами вида $3n+1$ (30 чисел с остатком 1 от деления на 3), а Васе — 30 гирек вида $3n+2$ (30 чисел с остатком 2 от деления на 3). Гирек хватит: Пете можно дать гирьки 1, 4, ..., 88 (ровно 30 гирек, т.к. последняя гирька равна $1+29\cdot 3=88$), Васе можно дать гирьки 2, 5, ..., 89 (ровно 30 гирек, т.к. последняя равна $2+29\cdot3=89$). Тогда если взять любые 11 гирек Пети, их сумма будет равна $3k_1+1+3k_2+1+3k_3+1+\ldots+3k_{11}+1=$ $=3(k_1+k_2+\ldots+k_{11})+11$, что не делится на 3, а сумма любых 12 гирек Васи будет равна $3m_1+2+3m_2+2+\ldots+3m_{12}+2=$ $=3(m_1+m_2+\ldots+m_{12})+24$, что делится на 3, значит, гирьки не уравновешиваются; и наоборот, сумма любых 12 гирек Пети равна $3k_1+1+3k_2+1+\ldots+3k_{12}+1=3(k_1+k_2+\ldots+k_{12})+1$, что делится на 3, а сумма любых 11 гирек Васи равна $3m_1+2+3m_2+2+\ldots+3m_{11}+2=3(m_1+m_2+\ldots+m_{11})+22$, что не делится на 3, значит, гирьки тоже не уравновешиваются.

Ответ: да, сможет.

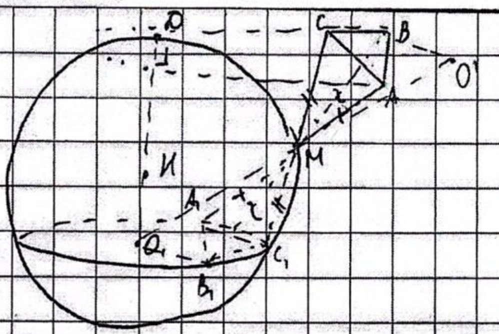
(Среди первых 100 чисел 34 числа с остатком 1 по модулю 3 и 33 числа с остатком 2 по модулю 3, гирек точно хватит).

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Т.к. G_1 и G_2 пересекаются в точках A и B $\Rightarrow$ в этих точках их значения равны:

$px^2+qx+r=x^2 \Rightarrow (p-1)x^2+qx+r=0$, где корни A_x и B_x. Тогда по теореме Виета: $A_x+B_x=\frac{-q}{p-1}$. Найдём касательные к G_2 в точках A и B: $y_A=f'(A_x)(x-A_x)+f(A_x)=$
$=2A_x(x-A_x)+A_x^2=2A_x x-A_x^2$, $y_B=2B_x x-B_x^2$. В точке C они пересекаются $\Rightarrow y_A(C_x)=y_B(C_x) \Rightarrow 2A_x\cdot C_x-A_x^2=2B_x\cdot C_x-B_x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(A_x-B_x)C_x=A_x^2-B_x^2 \Rightarrow C_x=\frac{A_x+B_x}{2}=\frac{-q}{2(p-1)} \Rightarrow C_x$ - вершина параболы $(p-1)x^2+qx+r$?

ЗАДАЧА № 11. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



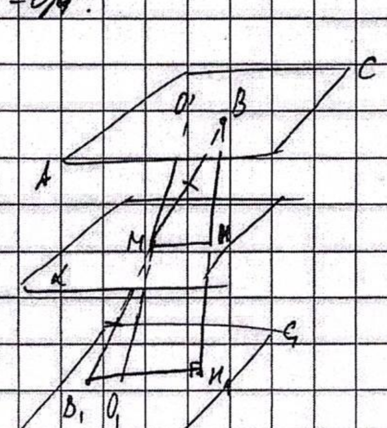
Рассмотрим четырёхугольник A_1B_1AB. Его диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения M пополам $\Rightarrow$ A_1B_1AB – параллелограмм $\Rightarrow AB \parallel A_1B_1$. Рассмотрим четырёхугольник B_1C_1BC. Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow B_1C_1BC$ – параллелограмм $\Rightarrow B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ (т.к. плоскости содержат по две пересекающиеся прямые, попарно параллельные между собой). верно Т.к. $MA_1B_1C_1$ – вписанный $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ вписан в окружность с центром O_1, лежащую на поверхности сферы. D – точка касания плоскости (ABC) и сферы $\Rightarrow$ радиус $KD \perp (ABC)$. $KO_1 \perp (A_1B_1C_1)$ (по свойству сферы) и $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \Rightarrow K, D, O_1$ лежат на одной прямой и $O_1D \perp (ABC)$. 2б Проведём прямую O_1M до пересечения с плоскостью (ABC). ~~[illegible]~~? O' – точка пересечения O_1M и (ABC). Рассмотрим $\triangle O_1B_1M$ и $\triangle O'BM$. Проведём через (·)M плоскость α параллельную $(A_1B_1C_1)$ и (ABC). Отрезок B_1B, заключённый между плоскостями $(A_1B_1C_1)$ и (ABC), делится параллельной им плоскостью α пополам $\Rightarrow$ отрезок $O'O_1$ тоже делится пополам $\Rightarrow O_1M = O'M$. Тогда $O_1B_1 = O'B$ из ра-

(докажите зачем

ЗАДАЧА № 11.8	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-2-32 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

венства $\triangle O_1B_1M$ и $\triangle O'BM$ ($O'M = O_1M$, $B_1M = BM$, $\angle O_1MB_1 = \angle O'MB$ как вертикальные). Аналогично $A_1O_1 = AO'$, $C_1O_1 = CO'$. Но $O_1B_1 = O_1C_1 = O_1A_1$ как радиусы описанной окружности $\Rightarrow O'B = O'C = O'A$ $\Rightarrow$ точки A, B и C равноудалены от точки O' $\Rightarrow$ O' – центр описанной окружности $\triangle ABC \Rightarrow O' = O$. Т.к. $O_1D \perp (ABC) \Rightarrow O_1D \perp DO \Rightarrow \triangle DOO_1$ – прямоугольный. $MO_1 = MO$ $\Rightarrow$ DM – медиана $\Rightarrow DM = MO$, т.к. медиана, проведённая из прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы, ч.т.д.

Более подробное док-во того, что $O_1M = O'M$:



Проведём из точки B $BH_1 \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow BH_1 \perp \alpha$ (т.к. $\alpha \parallel (A_1B_1C_1)$). H – точка пересечения BH_1 и $\alpha \Rightarrow BH \perp \alpha$. $\triangle BMH \sim \triangle BB_1H_1$ ($\angle B$ – общий, $\angle BHM = \angle BH_1B_1$) $\Rightarrow \frac{BM}{BB_1} = \frac{BH}{BH_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow BH = BH_1$. Передвинем BH_1 в точку O' ($B = O'$). Аналогично $\triangle O'HM \sim \triangle O'H_1O_1$ ($\angle O'$ – общий, $\angle O'HM = \angle O'H_1O_1$) $\Rightarrow \frac{O'H}{O'H_1} = \frac{O'M}{O'O_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow O'M = O_1M$.

7 б