Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-26		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	0	0	21
подписи членов жюри	Кулешов	Широкова	Кулешов	Кулешов Широкова	Кулешов Широкова	

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

т.к. прямоугольники располагаются сторонами ‖ линии сетки, минимальная сторона квадрата, содержащий прямоугольник $1\times n$, ~~=~~ равна n.

Предположим, что прямоугольник $1\times n$ – самый большой что мы взяли. тогда минимальная площадь всех остальных прямоугольников в наборе равна $n\cdot n - 1\cdot n = n(n-1)$.

Теперь посмотрим на Σ площадей всех прямоугольников меньших $1\times n$. Так как площадь ~~каждого~~ i-ого прямоугольника равна $1\cdot i = i$, то площади всех меньших $1\times n$ представляют ариф. последовательность от 1 до $n-1$ с шагом 1 Σ площадей тогда равна $\frac{n(n-1)}{2}$

$\frac{n(n-1)}{2} \geq n(n-1)$ это ~~уравн~~ неравенство ~~имеет ровно одно решение~~ имеет ровно одно решение в натуральных числах $n=1$

Ответ: не может.

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{x_i^2 - 1}{x_i} = \frac{(x_i-1)(x_i+1)}{x_i}$$

$x_1 > 1$ т.к. если $x_1 = 1$, то $\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 0$ и все $p = 0$, а значит натуральных чисел среди них 0.

p_1 не может быть натуральным, т.к. $p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1}$, $x_1 \in N$, а $\frac{1}{x_1}$ имеет дробную часть (т.к. $x_1 \in N$ и $x_1 > 1$) Оценка +

если взять последовательность $x_1 = 2$, $x_i = x_{i-1} + 1$, то все ~~остальные~~ оставшиеся p кроме p_1 будут натуральными:

$$p_1 = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1} = \frac{(x_1-1)(x_2)}{x_1}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{(x_2-1)(x_2+1)}{x_2} = \frac{(x_1-1)(x_3)}{1}$$

$$p_3 = p_2 \cdot \frac{(x_3-1)(x_3+1)}{x_3} = \frac{(x_1-1)(x_3-1)(x_4)}{1}$$

и т.д.

Ответ: 2023

7 баллов

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

~~Вариант~~

назовём связью критерий цвета соседних точек соответственно, если соседние точки разных цветов, то связь разноцветная, иначе одноцветная

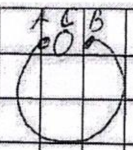
больше 50 разноцветных связей Оля гарантировать не может, т.к. всего связей 100, а Вася имеет стратегию из 50 одноцветных связей:

т.к. Вася ходит вторым, то на каждый из его 50 ходов он может закрасить незакрашенную точку рядом с уже закрашенной в ~~противоположный~~ такой же цвет и образовать одноцветную связь. V +3

Рассмотрим ситуацию перед последним Васиным ходом, завершающим игру. Если к этому моменту на поле уже есть 50 разноцветных связей, то исход игры нас не интересует. Если же связей меньше, то их 49, ведь именно столько может гарантировать себе Оля за 49 ходов после первого стратегией, приведённой выше для Васи, но с образованием разноцветных связей.

+2

ЗАДАЧА № 11 . 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



В таком случае Вася должен закрасить точку C так, что бы образовалась хотя бы одна разноцветная связь и тогда их будет по крайней мере 50. рассмотрим цепь закрашенных точек от A до B. точка A имеет какой-то цвет и в процессе цепи цвет меняется 49 раз, ведь именно столько у нас разноцветных связей. 49 - нечетное число, а значит B будет иметь цвет отличный от A, а значит в какой бы цвет ни покрасил Вася точку C – 50-ая разноцветная связь будет образована.

Ответ: 50 пар

Пояснение к стратегии: незакрашенная точка рядом с закрашенной точно найдётся, иначе:

1. нет ни одной закрашенной точки:
   такого быть не может после 1-ого хода Оли
2. нет ни одной незакрашенной точки:
   такого быть не может до завершения игры.

ЗАДАЧА № 11. 5	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$t^4+at^3+bt^2=(a+b)(2t-1)$

(1) $t^4+at^3+bt^2-t\cdot 2(a+b)+(a+b)=0$

т.к. в левой части многочлен 4 степени, t_1, t_2, t_3 и t_4 - все корни ур-ия. (~~все~~ действительные)

по Th о действ корнях:

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3+t_4=-a \\ t_1t_2+t_3t_4+t_1t_3+t_2t_4+t_2t_3+t_1t_4=b \\ t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4=2(a+b) \\ t_1t_2t_3t_4=a+b \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a<0 \quad \text{т.к. } t_4>t_3>t_2>t_1>0 \\ b>0 \\ |a|<b \quad \text{т.к. } a+b>0 \end{cases}$$

(1) ~~$t^4+at^3-at^2+(2(a+b)-(a+b))^2=0$~~

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-2-26		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	0	0	~~7~~ ~~0~~ 1	0	
подписи членов жюри	Кулешов	Широкова	Широкова	Широкова Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11 . 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Дадим Пете гирьки с ~~весами~~ массами 1г ... 30г, а Васе с массами 71г ... 100г.

т.к. любая гирька Пети весит меньше любой гирьки Васи, 12 Васиных гирь никак не уравновесят 11 Петиных

посчитаем минимальный вес 11 гирь Васи:

$71 + ... + 81 = \frac{(71+81) \cdot 11}{2} = 76 \cdot 11 = 836$г

посчитаем максимальный вес 12 гирь Пети:

$19 + ... + 30 = \frac{(30+19) \cdot 12}{2} = 49 \cdot 6 = 294$г

Соответственно, никакие 12 гирь Пети так же не могут уравновесить любые 11 гирь Васи.

Ответ: сможет

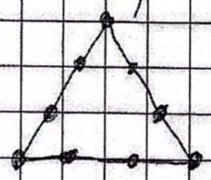
ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 1 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

9

Первым делом докажем, что для треугольника с вырезанной точкой минимальное кол-во прямых, необходимых для разбиения на множества равно стороне.

Для стороны длиной 3 работает:

почему не хватит 2-х?



За 2 прямые не разбить

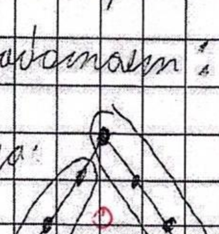
Допустим, есть треугольник со стороной a и вырезанной точкой, для которого высказывание верно. Добавим к нему ряд точек, чтобы сторона стала $a+1$, соответственно мы добавили $a+1$ точку. Т.к. нет прямой, проходящей через все новые точки и участвовавшей в разбиении прошлого треугольника, то как минимум одна из $a+1$ новых точек не лежит на одной из a старых прямых и придётся взять одну новую.

+4 ~~а если другое хитрое разбиение?~~

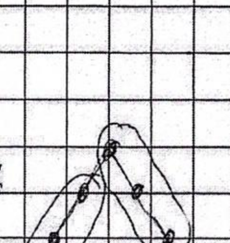
Для треугольника стороной $3n$ кол-во разбиений на множества равно $8^{(n^2)}$.

Для $n=1$ работает:

6 способов вида:



2 способа вида:



очевидно.

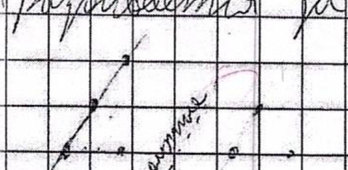
ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 2 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

предположим, есть треугольник стороной $3n$, для которого работает формула. Добавим к нему с каждой стороны по ряду точек, таким образом получив сторону $3(n+1)$ и сохранив выколотую точку в качестве центра треугольника. Для каждой из $3n$ прямых, разбивавших старый треугольник найдутся 2 новых точки на ней лежащих, причём для каждой прямой свои, иначе:

две прямые совпадают $\Rightarrow$ 2 множества точек лежат на одной прямой. Вычеркнем все точки ~~из~~, лежащие на этой прямой, получим треугольник со стороной k и равнобокую трапецию с боковой стороной $(3n-k-2)$

если $k = 3n-1$, то мы вычеркнули боковой ряд и трапеции нет

если $k = 3n-2$, то трапеция представляет собой прямую и разбивается за 1 прямую соответственно.



треугольник разбивается за $\min k$ прямых по доказательству выше решения

~~[illegible]~~

трапеция, очевидно, разбивается за $(3n-k-1)$ прямую, так как представляет собой точки лежащие на $(3n-k-1)$ прям. параллельной прямой. Таким образом нам нужна $3n-1$ прямая, а без учёта

на какой?

трёх $3n+1$ если сторона $3n$

почему?

Как расположены множества на прямой?!

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 3 ИЗ 3 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

форм прямых, что мы выделили, а на разбиение нам давалось $3n-2$ прямых.

Таким образом кол-во разбиений домножается на $4^{3n} = 8^{2n}$ (4 - кол-во способов выбрать от одн 2 точек из 2, $3n$ - кол-во прям) ещё на 8 (кол-во разбиений „внешнего слоя", его разбиение подобно треугольника со стороной 3), причём то, что мы можем забрать по 2 точки из каждой из сторон $3n$ прямых, на это не влияет, ведь мы задели лишь $6n$ из $9n+9$ на „внешнем слое".

$8^{(n^2)} \cdot 8^{2n} \cdot 8 = 8^{(n^2+2n+1)} = 8^{((n+1)^2)}$ ЧТД.

тогда для треугольника со стороной $111 = 37 \cdot 3$ кол-во разбиений равно $8^{(37^2)} = 8^{1369}$

P.S. „внешний слой" - те ~~п~~ 3 ряда, что мы добавили

С. А. Банилов

ЗАДАЧА № 11.10	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-26 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Стратегия: изначально ~~дробь~~ представляем 1 как $\frac{2^n+50}{2^n+50}$ и делим как $\frac{2^{n-1}+24}{2^n+50}$ и $\frac{2^{n-1}-26}{2^n+50}$ (да, они не несократимы, но на следующем шаге мы их домножим на $\frac{2}{2}$, так что это неважно).

Далее, в зависимости от чётности числителя мы делим оставшуюся дробь на:

если чётный

~~числитель~~ $\frac{\frac{\text{числитель}}{2}+1}{2^n+50}$ и $\frac{\frac{\text{числитель}}{2}-1}{2^n+50}$

если нечётный

$\frac{\frac{\text{числитель}}{2}+0,5}{2^n+50}$ и $\frac{\frac{\text{числитель}}{2}-0,5}{2^n+50}$ } Если числитель равен 1, то это в при n → так случится

т.к. если бы числитель всегда был чётным, а Вася выбирал бы всегда меньшую дробь, на n-ый ход дробь бы не смогла разделится на две ~~дроби~~ с знаменателем 2^n+50, но изначальный числитель — не степень двойки, а значит в какой-то момент он будет нечётным и скорость уменьшения числителя замедлится.