Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-25

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	1	0	22
подписи членов жюри		Широков		Куликов		

ЗАДАЧА № 11 . 1	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Нетрудно заметить, что в квадрат $n \cdot n$ явно не влезет прямоугольник $1 \cdot (n+k)$ где $k \in \mathbb{N}$ (т.к. ~~его~~ прямоугольники укладываются // сторонам квадрата и одна ~~его~~ сторона прямоугольника больше стороны квадрата), что очевидно $\Rightarrow$ в квадрат $n \times n$ можно поставить только прямоугольники 1×1, 1×2 .... $1\times(n-1)$, $1\times n$

посчитаем количество клеток (1×1) во всех этих прямоугольниках ~~по можно~~ ~~в каждо~~ Очевидно что в прямоугольнике $1\times i$ i клеток 1×1 $\Rightarrow$ по методу Гаусса

$1+2+3...+n = \frac{(n+1)n}{2} \Rightarrow$ сумма клеток $= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

Чтобы покрыть квадрат $n\times n$ в котором n^2 клеток нужно чтобы эта сумма была $\geq n^2$ то есть хватало бы этого набора прямоугольников чтобы покрыть площадь квадрата, тогда должно быть

$n^2 \leq \frac{(n+1)n}{2}$

$2n^2 \leq n^2+n$

$n^2 \leq n$ что для натуральных чисел имеет единственное решение $n=1$ $\Rightarrow$ при $n>1$ $n^2 > \frac{(n+1)n}{2}$

а значит у Олега не получится собрать квадрат со стороной >1

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{(x_1^2-1)(x_2^2-1)\ldots(x_i^2-1)}{x_1 x_2 \ldots x_i} =$

$= \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_2+1)(x_2-1)\ldots(x_i-1)(x_i+1)}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_i}$ заметим, что для

таких $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2024}$ с условием что $x_i = x_{i-1}+1$

получаем $p_i = \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_1+2)x_1 \cdot \ldots \cdot (x_1+i-2)(x_1+i)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+i-1)}$ не трудно

заметить, что при любых p_i при $i > 1$ и $x_1 > 1$ p_i является натуральным числом, т.к. можно сократить одинаковые множители в знаменателе и числителе

для большей понятности пример: $i = 3$

$p_3 = \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_1+2)(x_1)(x_1+3)(x_1+1)}{x_1(x_1+1)(x_1+2)} = (x_1-1)(x_1+3)(x_1+1)$ очевидно

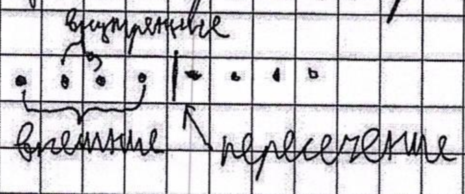
является натуральным при $x_1 \in \mathbb{N}$ и $x > 1$ т.к. каждый множитель натурален, теперь разберем случай $i = 1$

$p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2-1}{x_1}$ $x_1^2 \vdots x_1$ $x_1^2 - 1 \not\vdots x_1 \Rightarrow$ не является (кроме $x_1 = 1) \Rightarrow x_1^2 - 1 = 0$ $0 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ никогда не является натуральным числом, $\Rightarrow$ при последовательных x и

$x_1 > 1$ среди чисел $p_1 \ldots p_{2024}$ будет 2023 натуральных, 2024 быть не может т.к. p_1 не может быть натуральным

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

разобьем наши 100 точек по кругу на четверки подряд идущих точек начиная отсчет от первого хода Оли, учитывая что точки равном. по кругу первый ход не играет роли т.к. повернув на n градусов круг получим любой другой вариант постановки первого хода, что очевидно далее заметим ~~что теперь~~ заполнение четверок относительно краев т.к. если Вася поставит во „внутренн." часть четверки какой-либо цвет то Оля поставив другой цвет в соседнюю „внутреннюю" точку четверки гарантирует себе одну пару разноцв. точек, а значит надо смотреть на крайние точки четверок и их пересечение



~~если~~ как бы не ходил Вася ~~вторым~~ первым ходом, Оля может сделать вторым ходом такую комбинацию: 3 • • 3 цвет не имеет значения так что пусть будет зеленый у Оли синий.

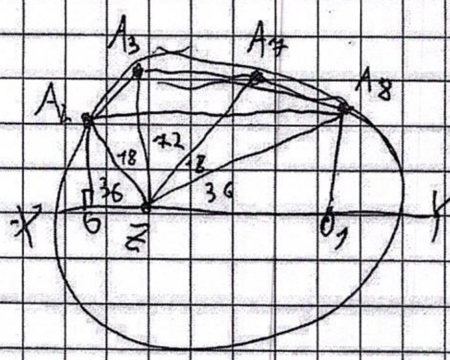
заметим, что таким образом ~~будет 2 4~~ (пусть будет

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

2 цвета ● и ○, • - ~~пусто~~ белые) что если края
одноцветны ●..● , то какая бы небыла ~~края~~ середина
то в этой четверке 2 пары разн. цветов, кроме
● ситуации одноцветности всех 4, но
такое не может получиться ведь 50 точек
красит Оля => по 2 в каждой четверке =>
=> либо края будут другого цвета относ. середины,
либо в центре будет одна другого цвета
●○●● 2 разноцв. ●●○● 2 разноцв.
●○○● 2 разноцв, теперь заметим, в дальнейшем
что каждый ход ~~Пети~~ Васи в крайние точки
четверки, Оля гарантирует либо 2 разноцв пар
внутри четверки либо 1 внутри четверки
и 1 разноцв. пару в пересечении четверок. =>
=> ~~50~~ 25 четверок + 25 пересеч = 50, Вася
не может ставить с точкой соседнего
такого-же цвета и так же получить
не менее 50 => 50 пересечений получит
Оля вне зависимости от Васи

7

ЗАДАЧА № 11 . 4	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



т.к. раз развернутый угол делят на 10 частей то $\frac{180}{10} = 18^\circ$ =>

=> $\angle XZA_2 = 36^\circ = \angle YZA_8$,

$\angle A_2ZA_3 = \angle A_7ZA_8 = 18^\circ$

пусть $XY=1$

$\angle A_3ZA_7 = 72^\circ$

не трудно заметить, что если $S_{A_2ZA_8} = S_{A_3A_7Z}$ то ~~...~~ факт который нам нужно доказать правда (из площади $ZA_2A_3A_7A_8$) тогда вспомним что $S_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$ =>

$S_{\Delta A_2ZA_8} = \frac{A_2Z \cdot ZA_8 \cdot \sin 108}{2}$

$S_{\Delta A_3ZA_7} = \frac{A_3Z \cdot A_7Z \cdot \sin 72}{2}$

Известный факт, что $A_2O = \sqrt{XO \cdot OY}$ =>

$\sqrt{XO \cdot OY} = OZ \cdot tg\, 36$

$XO \cdot (1 - XO) = OZ^2\, tg^2 36$

$XO^2 - XO + OZ^2\, tg^2 36 = 0$

$XO = \frac{1 + \sqrt{1 - 4OZ^2 tg^2 36}}{2}$ => $XZ = XO + OZ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4OZ^2 tg^2 36}}{2} + OZ$

=> $\sqrt{XO \cdot OY} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4OZ^2 tg^2 36}}{2} \cdot (OZ + ZY)}$ не трудно посчитать

и с другой стороны получив с другой стороны

ЗАДАЧА № 11. 4	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

такую же часть выразив ~~XY~~ и ~~YZ~~ ZO и OZ и ZO_1 и O_1Y через XY и YZ получаем, что произведения сторон равны и $\sin 72 = \sin 108 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{\triangle \cancel{A_2A_3Z}} A_2ZA_8 = S_{\triangle} A_3A_7Z \Rightarrow S_{\triangle A_2A_3Z} + S_{\triangle A_7A_8Z} =$
$= S_{A_2A_3A_7A_8}$

10

Всероссийская олимпиада школьников | Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-2-25		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	0	1	0	0	8
подписи членов жюри				Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11 . 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

учитель может дать Пете гири весом с 71 до 100 Г и Васе от 1 до 30 Г заметим, что суммы 11 самых легких гирь у Пети $= \frac{11\cdot(71+81)}{2} = 76\cdot 11$

а 12 наибольших у Васи $\frac{12\cdot(49)}{2} = 6\cdot 49$

$76\cdot 11 > 6\cdot 49$ ~~если~~ очевидно, что если взять 12 Петиных то сумма ~~их~~ его гирь возрастет и при 11 Васиных у того убудет => так же не уравняются => учитель сможет

ЗАДАЧА № 11.7 | ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-2-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

найдем координаты точек A и B =>

$px^2+qx+r = x^2 \Rightarrow (p-1)x^2+qx+r=0$ $p\neq 1$ т.к. тогда только 1 точка перес.

$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2-4r(p-1)}}{2(p-1)}$ это и есть наши точки при

$q^2-4r(p-1)>0$ запомним это неравенство дальше

вспомним что уравнение касательной $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

в нашем случае $f'(x_0)=2x_0 \Rightarrow y = 2x_0x-2x_0^2+x_0^2 =$

$= 2x_0x - x_0^2$, подставляем наши x и приравниваем

$\frac{-q+\sqrt{q^2-4r(p-1)}}{p-1} \cdot x - \frac{2q^2-2q\sqrt{q^2-4r(p-1)}-4r(p-1)}{4(p-1)^2} =$

$= \frac{-q-\sqrt{q^2-4r(p-1)}}{p-1} \cdot x - \frac{2q^2+2q\sqrt{q^2-4r(p-1)}-4r(p-1)}{(p-1)^2}$ перенесем

в одну сторону и приведём подобные и

получим

$\frac{2\sqrt{q^2-4r(p-1)}}{p-1}x + \frac{4q\sqrt{q^2-4r(p-1)}}{(p-1)^2} = 0$ перенесем второго сл-ое вправо и сократим

на $\frac{2\sqrt{q^2-4r(p-1)}}{p-1}$ получим $x = -\frac{2q}{p-1}$ —

теперь приравняем уравнение одной касательной с этой

точкой к изначальному px^2+qx+r

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$\frac{-q+\sqrt{q^2-4r(p-1)}}{p-1}\cdot\left(-\frac{2q}{p-1}\right)=\frac{2q^2 \mp 2q\sqrt{q^2-4r(p-1)} \mp 4r(p-1)}{(p-1)^2}=$$

$$= p\cdot\frac{4q^2}{(p-1)^2} \mp \frac{2q^2}{p-1}+r$$

$$\frac{4r}{(p-1)}=\frac{4pq^2}{(p-1)^2}-\frac{2q^2}{p-1}+r$$

$4r(p-1)=4q^2p-2q^2(p-1)+r(p-1)^2$ откуда

$q^2=\frac{4r(p-1)-r(p-1)^2}{2(p+1)}$ подставляем в уравнение что мы запомнили

$$\frac{r(p-1)(3-p)}{2(p+1)}-4r(p-1)>0$$

$$\frac{r(p-1)(3-p-8(p+1))}{2p+1}>0 \Rightarrow \frac{(11-9p)\cdot(p-1)\cdot r}{2p+1}>0$$

учитывая, что для каждого p найдется такое r что левая часть >0 то р.л.ч. кроме $p-1=0$ и $2p+1=0 \Rightarrow p\neq 1$ и $p\neq-\frac{1}{2}$

① — За то, что обвёл красной ручкой

Слава За

ЗАДАЧА № 11. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

8

Заметим, что расстояния ~~от точек~~ A_1, B_1, C_1 до плоскости ABC равны т.к. каждое из них = 2·(расстояние от M до (ABC)) т.к. буквально каждый вектор можно разложить на высоту 2·(расстояние от M до (ABC) и вектор на плоскости (ABC) нетрудно заметить ~~что~~ тогда, что эта плоскость // (ABC) и в этой плоскости есть окружность содержащая A_1, B_1, C_1 т.к. плоскости центрально симметричны относительно (.) M => пусть эта точка будет O' тогда заметим, что в силу (ABC) касается сферы, то проекция O' на (ABC) будет D, т.к. центры всех окружн. // (ABC) ∈ DK, где K центр сферы, т.к. (.)M равноудалена от // плоскостей (т.к. высота между плоск. = 2·(расст. от M до (ABC)) то MO' = MD, нетрудно заметить что (.) O равноудалена от (.)A, (.)B (.)C и при разложении векторов на высоту от (.)M до (ABC) и расст. от проекции (.)M на (ABC)

почему?

ссылка на ABC // $A_1B_1C_1$ что не доказано.

а нужно доказать!

недоказано

с чего бы?

это тоже доказано?

это всё ещё не доказано!

а это не вопрос!!!

ЗАДАЧА № 11. 8 | ЛИСТ 2 ИЗ 2 | M-11-2-25

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | ШИФР (заполняется оргкомитетом)

заметим, что $MO = MO'$, т.к. ~~расстояние до MO~~

O и O' центрально симметричны относительно (·)M

почему?

~~ведь~~ сохраняются расстояния до (·) на окр. a =>

и до центра => $\left.\begin{array}{l} MO = MO' \\ MO' = MD \end{array}\right\} \Rightarrow MO = MD$ ч.т.д.

(7) Слова За.

// Обсудить бы можно $MO' = MD$

// для тоже всё обсуждено..

1б а) Ни один тезис не доказан.

б) Из всех тезисов будет получен верный результат при их доказанности

в) Ни один из тезисов не является сложным в д-ве.

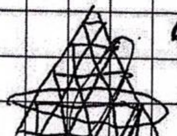
ЗАДАЧА № 11 . 9	ЛИСТ 1 ИЗ 2 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11 - 11 - 2 - 25 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

и заметим, ~~что если брать большеполовины~~

17 нельзя брать наборы (*) // другой стороне

если ~~выше есть~~ есть прямая „ниже" (см рис)

данной, // другой стороне



← ниже чем эта => предположим

в каком месте она ниже?

что 1 набор в котором линия ниже середины

тогда 2 ~~3~~ набора // ост. стор ~~ост.~~ явно не могут

пересечься не пересекая данный набор

посчитаем кол-во вариантов это при $x \le 57$ до

111 $\sum_{x=37}^{x=111} C_{223-x}^{110}$ т.к. ~~все~~ проводим все

две стороны? почему при выборе этого прямых достаточно для покрытия всех точек? Выбора

возм. угольные при каждом x а это $x+1$ для

группы где нижн линия // стор x ~~ст~~ и для ост

$111-x+1$ то есть суммарно $111-x+1+111-x+1+x+1=$

$=224-x$ ~~то~~ теперь нам нужно ~~у~~ выбрать

из этих линий 111 штук, обязательно выбираем

нашу „x-овую" линию, т.к. иначе ~~разни~~ посчитаем

несколько одинак. случаев.

1) нет чёткого описания допустимых наборов

2) не доказано, что все наборы имеют именно такой вид (Лемма)

3) проводятся именно линии, общие точки на них не учитываются

ЗАДАЧА № 11. 9

ЛИСТ 2 ИЗ 2
(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-11-2-25
ШИФР (заполняется оргкомитетом)

и тогда получаем как раз $\sum_{x=57}^{x\le 112} C_{223-x}^{110}$ домножаем на 3 т.к. у нас 3 варианта выбора какой стороне // этот набор и добавим варианты когда каждая группа прямых „выше" середины от. от вершины прот. стороне и до этой стороны а это выбор 111 прямых из 56+56+56 прямых то есть C_{168}^{111} Так если все прямые „выше", разве это не 1 случай? — заметим что мы рассмотрели все случаи, т.к очевидно, что не может быть варианта с 2 наборами // разным сторон. > чем до середины и рассмотрели случай, когда каждый набор до середины => ответ:

$$\sum_{x=57}^{x\le 112} C_{223-x}^{110} + C_{168}^{111}$$

ЗАДАЧА № 11. 10

ЛИСТ ~~1~~ 1 ИЗ ~~1~~ 21 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М - 11 - 2 - 25

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

можно заметить, что каждый раз мы делим нашу дробь на > 2 т.к. получаем неравные дроби + стремимся к 2 т.к. иначе знаменатель одной из дробей будет > 2 $\Rightarrow$ при n операциях получится $x^n > 2^{n+50}$ при $n > 50$ и $x > 2$ значит ~~...~~ Петя должен делить свои дроби так, чтобы числитель не увеличивался > чем в 2 раза, при этом ~~...~~ есть запас в 50 получен по условию изначально взяв $^{\text{зн.}} =$