Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-2е

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	0	0	21
подписи членов жюри	Широкова	Широкова		Широкова	Широкова	

ЗАДАЧА № 11. 1	ЛИСТ 1 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-20 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Предположим, ~~противное~~ что нашелся такой квадрат. Т.к. его площадь > 1, то, очевидно, его сторона $n \geq 2$

Заметим, что в нём не может быть прямоугольников $1 \times K$, где $K \geq n+1$, т.к. в таком случае в нём будет прямоугольник со стороной большей чем его, что, очевидно невозможно (более чем очевидно, что стороны прямоугольников должны быть параллельны либо перпендикулярны какой-нибудь стороне квадрата, поэтому случаи, ~~где~~ остальные случаи исключаем)

Рассмотрим общую площадь ~~треугольников~~ прямоугольников $1 \times t$, где $t \leq n$. Её не трудно посчитать, она равна $\frac{n \cdot (1+n)}{2}$

Очевидно, что площадь нашего квадрата равна n^2.

Но в таком случае $\frac{n \cdot (1+n)}{2} < n^2$.

Действительно, $n^2 + n < 2n^2 \iff n < n^2$, а по условию $n \geq 2$.

Тогда в таком случае просто не хватит оставшихся прямоугольников. Противоречие.

Таким образом, требуемое невозможно

Ответ: Нет, ~~никогда~~ не может

ЗАДАЧА № 11 . 2

ЛИСТ 2 ИЗ 6

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-11-20

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть $x_2 - x_1 = d$.

Преобразуем. $p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \ldots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) =$

$= \frac{x_1^2 - 1}{x_1} \cdot \frac{x_2^2 - 1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_i^2 - 1}{x_i} =$

$= \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)\ldots(x_i-1)(x_i+1)}{x_1 x_2 \ldots x_i}$

Рассмотрим $p_1 = \frac{(x_1-1)(x_1+1)}{x_1}$. Заметим, что $x_1 - 1$ и x_1 взаимнопросты, т.к. они - два последовательных числа. Аналогично x_1 и $x_1 + 1$ взаимнопросты. Тогда ~~(x_2-1)~~ очевидно, что $(x_1-1)(x_1+1)$ не делится на x_1. А значит p_1 - не может быть натуральным числом. +

Таким образом, среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}$ не более $2024 - 1 = 2023$ натуральных чисел

Оценка +

Пример. Пусть $x_1 = 2$, а шаг $d = 1$. Тогда

$p_i = \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)\ldots(x_i-1)(x_i+1)}{x_1 \cdot (x_1+1) \cdot \ldots \cdot (x_1+i-1)} =$

$= \frac{(x_1-1)(x_1+1)(x_1+1-1)(x_1+1+1)\ldots(x_1+i-1-1)(x_1+i-1+1)}{x_1(x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_1+i-1)} =$

$= (x_1-1)\cdot(x_1+1)(x_1+2)(x_1+3)\ldots(x_1+i-2)(x_1+i)$, что при всех $i \geq 2$, очевидно, является натуральным числом. Таким образом, $p_2, p_3, \ldots, p_{2024}$ - натуральные числа. Всего их 2023

Приведённое выше ~~в~~ в примере разложение p_i применялось для всех $i \geq 2$ +

Ответ: 2023

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 3 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-11-20 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Покажем, что Вася может добиться ≤ 50 пар разноцветных точек

Пронумеруем точки 1, 2, ..., 100. Теперь разобьём точки на пары следующим образом: (1, 2), (3, 4), ..., (99, 100). Если Оля ~~ставит~~ красит число из пары в один цвет, тогда Вася будет красить другое число из пары в такой же цвет. Тогда у нас будет 50 пар, причём в каждой паре числа одинакового цвета. Числа с разными цветами могут быть только на стыке двух пар. А таких „стыков", очевидно, ≤ 50. („стык" — это два подряд идущих числа либо 1 и 100, не находящихся в одной паре)

2+1

Пример стратегии для Оли на 50 пар.
Разобьём числа на 25 четвёрок следующим образом: (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), ..., (97, 98, 99, 100). Числа наименьшие и наибольшие в каждой четвёрке будем называть „меньшими" и „большими" соответственно.

Стратегия за Олю следующая:

Обозначим: зелёный цвет — X, синий — Y.

1) Если Вася ставит X в среднее число из четверки (среднее число — например одно из чисел 2 или 3 в четверке (1, 2, 3, 4)). То мы ставим Y в меньшее этой четверки

2) Если Вася ставит Y в среднее число из четверки, то мы ставим X в большее число этой четверки.

3) Если Вася ставит X в большее / меньшее четверки, то мы ставим X в меньшее / большее число четверки

4) Если Вася ставит Y в большее / меньшее число четверки то мы ставим Y в меньшее / большее число четверки

1/2 и 3/4

ЗАДАЧА № 11. 3 | ЛИСТ 4 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | M-11-90 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

5) Если Вася ставит X в четверку (X, *, *, X), то мы ставим Y в оставшееся место

6) Если Вася ставит Y в четвёрку (Y, *, *, Y), то мы ставим X в оставшееся место.

7) В остальных случаях будем ставить противоположные цвета на места в стыках, 1 цвет из которых уже покрашен

8) Если таких стыков нет, то ставим X в большее

~~Таким образом: Внутри четверок (Y, *, *, X) очевидно будет хотя бы одна пара. При этом если следующая пара не переход (переход — пара вида (Y, *, *, Y) или (X, *, *, X))~~

~~Теперь одну четверку будем~~

Теперь рассмотрим количество пар, которые даёт каждая четвёрка (будем рассматривать подчёркнутую четверку):

Исходя из нашей игры возможны 5 видов ~~ситуаций~~ ситуаций:

1) (Y, *, *, X) (Y, *, *, X)

Внутри первой четверки очевидно будет одна пара. При этом в стыке будет +1 пара

Всего: +2 пары

2) (X, *, *, X)

По нашей стратегии в рассматри-

ЗАДАЧА № 11. 3	ЛИСТ 5 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-10 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

важной четверке должен быть на среднем месте Y. Очевидно, что это даёт нам +2 пары

3) (Y, Ж, Ж, Y) ~~(Y, Ж, Ж, Y)~~

По нашей стратегии в рассматриваемой четверке должен быть X. Очевидно, что это даёт нам +2 пары

4) (Y, Ж, Ж, X) (X, Ж, Ж, X)

Эта четверка даёт нам +1 пару. Но при этом очевидно, что ~~когда не~~ четверка находящаяся справа от нашей или следующая за ней такого же вида четверка и т.д. встретит после себя Y, что на стыке даст +1 пару

Итого +2 пары

5) (Y, Ж, Ж, Y) (Y, Ж, Ж, X)

Аналогично со случаем 4

+2 пары четверок.

Таким образом, каждая четверка даст по 2 пары. А так как четверок 25, то всего пар $25 \cdot 2 = 50$.

Ответ: 50 пар

2

7

ЗАДАЧА № 11 . 5	ЛИСТ 6 ИЗ 6	М-11-20
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$t^4 + at^3 + bt^2 = (a+b)(2t-1)$

$t^4 + at^3 + bt^2 = 2at + 2bt - a - b$

$t^4 + at^3 + bt^2 - (2a+2b)t + (a+b) = 0$

По обобщ. т. Виета:

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -a$

$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_{24} + t_3 t_4 = +b$

$\Rightarrow a^2 - 2b = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2$

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-2-20

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	0	0	~~0~~ 3	0	10
подписи членов жюри		Широкова		Широкова Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11 . 6	ЛИСТ 1 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-20 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть учитель раздаст Пете гири массами 1 г, 2 г, ..., 30 г, а Васе — 71 г, 72 г, ..., 100 г.

Тогда любые 11 Петиных гирь дают в сумме не больше $\frac{(20+30)\cdot 11}{2} = 25\cdot 11 = 275$. А любые 12 Васиных гирь дают в сумме не меньше $\frac{(71+82)\cdot 12}{2} = 6\cdot 153 > 6\cdot 150 = 900$. Тогда очевидно, что требуемое выполнится (т.к. $6\cdot 153 > 900 > 275$)

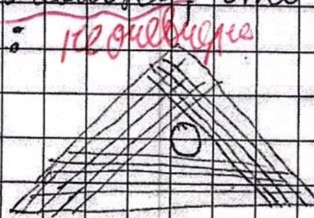
При этом любые 12 Петиных гирь дают в сумме не больше $\frac{(19+30)\cdot 12}{2} = 6\cdot 49 = 294$. А любые 11 Васиных гирь дают в сумме не меньше $\frac{(71+81)\cdot 11}{2} = 76\cdot 11 > 76\cdot 10 = 760$. Тогда очевидно, что требуемое выполнится (т.к. $76\cdot 11 > 760 > 294$)

Ответ: да, сможет

75

ЗАДАЧА № 11 . 9	ЛИСТ 2 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-20 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Очевидно, что возможен только один "тип" разбиения: неочевидно



О — центр треугольника

≡ — 37 параллельных линий, на которых могут располагаться точки.

Т.к. линии, параллельные нижнему основанию не могут находиться выше или на уровне с центром треугольника. Аналогично с линиями параллельными другим сторонам.

Тогда способы будут отличаться тем, куда мы отнесём точки, лежащие на пересечении линий

Рассмотрим следующее пересечение: V

Не трудно посчитать количество точек в нём $37 \cdot 37 = 37^2$

Тогда число способов отнести определённые точки к линиям параллельным нижнему основанию равно: $\sum_{k=0}^{37^2} C_{37^2}^{k}$ Очевидно, что остальные точки в данном пересечении определяются однозначно.

Т.к. таких пересечений 3, то всего различных способов будет $\left(\sum_{k=1}^{37^2} C_{37^2}^{k}\right)^3$ ~

Ответ: $\left(\sum_{k=0}^{37^2} C_{37^2}^{k}\right)^3$ верный ответ, лемма не доказана

Пояснение: $C_{37^2}^{k}$ означает C из $n = 37^2$ по k

ЗАДАЧА № 11. 9	ЛИСТ 3 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-20 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Почему возможен только один "тип" разбиения?

Выделим в T 3 треугольника со стороной 37 и вершиной в центре треугольника, причём одна из сторон каждого треугольника должна лежать на стороне T. Назовём их "красными".

Покажем что в каждом из таких треугольников можно выделить ≥ 37 линейных множеств.

Рассмотрим один из треугольников. В нём $\frac{(2+38)\cdot 37}{2}$ точек. Теперь будем выделять в нём самое большое множество и убирать его. Первым действием можно убрать ≤ 38 точек. Вторым ходом можно убрать ≤ 37 точек, ... 36-м ходом можно убрать ~~3~~ ≤ 3 точки. Значит за 36 ходов можно убрать $\leq \frac{(3+38)\cdot 36}{2} < \frac{(2+38)\cdot 37}{2}$ точек. А значит за мы попросту не сможем убрать все точки треугольника за 36 ходов. Разбиение на 37 линейных множеств очевидно, причём оно единственно. Действительно уберём самое большое линейное множество в нём, которое находится на прямой, содержащей центр T. Очевидно, что получившийся треугольник можно разбить на 37 линейных множеств. Теперь вернём ~~его~~ убранное множество. Если все 37 линейных множеств не лежат на одних и тех же прямых с возвращенными точками, то нам придётся добавить ещё одно линейное множество.

Выделим "зелёные" треугольники следующим образом": одна из сторон 37, причём одна из вершин должна совпадать с одной из вершин T.

Теперь заметим, что каждая параллель красного треугольника ~~[illegible]~~ содержит либо параллели

ЗАДАЧА №11. 9 | ЛИСТ 4 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-11-2-20 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

другого красного треугольника либо зеленого.
~~Поэтому у них без разницы какие параллели~~

Поэтому на каждой параллели лежат по 2 треугольника. Но если параллели двух красных треугольников пересекаются то в них, по доказанному ранее $38 > 37$ параллелей, причем стоит отметить что они могут пересекать одну из параллелей зеленого треугольника. Поэтому линейных множеств должно быть хотя бы $37+38+38-1=102$, чего быть не может, а значит параллели двух красных треугольников пересекаться не могут.

Параллели – самое большое линейное множество на прямой в Т.

ЗАДАЧА № 11. 7	ЛИСТ 5 ИЗ 5 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-2-20 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$px^2 + qx + r = x^2$

$(p-1)x^2 + qx + r = 0$

По условию, корни этого уравнения — координаты абцисс точек A и B, обозначим x_A и x_B соответственно.

Т.к. касательные к G_1 пересекаются в точке C, то:

$G_1'(x) = 2x$

y_A и y_B — касательные в точках A и B соответственно.

$y_A = 2x_A \cdot x + G_1(x_A) - 2x_A = (x-1)2x_A + x_A^2$

$y_B = 2x_B \cdot x + G_1(x_B) - 2x_B = (x-1)\cdot 2x_B + x_B^2$

$y_A = y_B$

$2(x-1)(x_A - x_B) = x_B^2 - x_A^2 = (x_B - x_A)(x_B + x_A)$

$\Rightarrow 2(1-x) = x_A + x_B$

$x = 1 - \frac{x_A + x_B}{2}$ — координата абцисы точки C

0 б