Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС 11
ШИФР	М-11-08	

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	5	2	0	21
подписи членов жюри	Кулешов	Кулешов	Кулешов	Кулешов	Кулешов	

ЗАДАЧА № 11 . 1

ЛИСТ 1 ИЗ 1

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-11-08

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть получилось составить квадрат $n \times n$, где $n > 1$. Тогда ни один прямоугольник, у которого есть сторона, большая n, в составлении не участвовал, так как такие не поместятся в квадрат со стороной n. Площадь квадрата равно n^2, это число должно быть меньше или равно, чем $\frac{n(n+1)}{2}$ т.е. сумма площадей всех прямоугольников, которые могли участвовать в составлении.

$\frac{n(n+1)}{2} \geqslant n^2$; $n^2 + n \geqslant 2n^2$; $n^2 - n \leqslant 0$; $n(n-1) \leqslant 0$

т.к. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n$ может быть равно только 1, но этот случай не подходит по условию $\Rightarrow$ предположение неверно и квадрат составить не получится.

Ответ: нет, не может.

7 7б.

ЗАДАЧА № 11. 2	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-08 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Оценка: $p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1}$; т.к. $x_1 \in \mathbb{N}$, то если $p_1 \in \mathbb{N}$, то $1 \vdots x_1 \Rightarrow$ $x_1 = 1$, но тогда $p_1 = 0$. Значит $p_1 \notin \mathbb{N}$, в таком случае натуральных чисел среди p_i не более 2023.

Пример: пусть $x_i = i+1$. Тогда последовательность x_i возрастает и все $x_i \in \mathbb{N}$

$p_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $p_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4$. Заметим, что $p_i = p_{i-1}\left(i+1 + \frac{1}{i+1}\right) = p_{i-1}\left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)$.

Значит, если $p_{i-1} \vdots x_i$, т.е. $p_{i-1} \vdots (i+1)$, то $p_i \in \mathbb{N}$ (Рассматриваем $i-1 \geq 2$, т.к. пример на 2023 и $p_1 \notin \mathbb{N}$). Докажем по индукции, что $p_{i-1} \vdots (i+1)$ для $i \in [3; 2025]$

База: $p_2 = 4$, $4 \vdots 4$, $p_3 = 4 \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) = 15$, $15 \vdots 5$, $p_4 = 15 \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right) = \frac{15 \cdot 24}{5} = 72$, $72 \vdots 6$

Переход: пусть для $i-1 = k$ это верно, докажем для $i-1 = k+1$. То есть нужно док-ть, что $p_{k+1} \vdots k+3$

По предположению индукции $p_k = (k+2) \cdot a$, $a \in \mathbb{N}$. Тогда

$p_{k+1} = p_k \cdot \left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) = (k+2) \cdot a \left(k+2 - \frac{1}{k+2}\right) = a \cdot (k+2)\left(\frac{(k+2)^2 - 1}{k+2}\right) = a \cdot \frac{(k+1)(k+3)(k+2)}{k+2} =$

$= a \cdot (k+1)(k+3) \Rightarrow p_{k+1} \vdots k+3$, переход доказан $\Rightarrow p_i \in \mathbb{N}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ и $i \in [2; 2024]$

7

Ответ: 2023

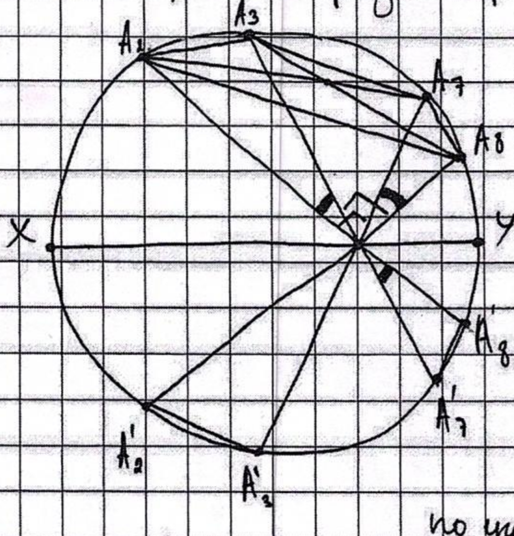
ЗАДАЧА № 11 . 3	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-08 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Всего пар 100. Каждая пара либо одноцветная, либо разноцветная. Вася хочет, чтобы разноцветных пар было как можно меньше, это эквивалентно тому, что он хочет, чтобы одноцветных пар было как можно больше. Всего Вася делает 50 ходов, каждым своим ходом он гарантированно может найти пару клеток, которые идут подряд, и одна из них закрашена, а другая нет. Тогда он может покрасить белую клетку в тот же цвет, что и закрашенная клетка рядом с ней. Значит, Аня не может гарантированно получить больше 50 разноцветных пар, причём 49 гарантировать может, так как во всех ходах, кроме 1, можно найти пару рядом стоящих белой и закрашенной клетки и покрасить белую в другой цвет, не совпадающий с закрашенной клеткой рядом. Если у Ани получится сделать так, чтобы у последней пустой клетки были соседи разного цвета, то как бы Вася эту клетку не закрасил, он прибавит и одноцветную и разноцветную пары, т.е. Аня получит 50 разноцветных пар.

3 за Борю, 2 за стремление Ани!

ЗАДАЧА № 11 . 4	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-11-08 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Симметрично отразим чертеж относительно XY



(•) A_2, Z, A_8' лежат на одной прямой, т.к. $\angle A_2ZY + \angle YZA_8' = 144° + 36° = 180°$

Аналогично $Z \in A_3A_2', A_3'A_7, A_2'A_8$.

Т.к. 4уг. $A_2A_3A_8'A_7'$ – впис, $\triangle A_2A_3Z \sim \triangle A_7'A_8'Z$, но $A_7A_8Z = A_7'A_8'Z \Rightarrow \triangle A_2A_3Z \sim \triangle A_7A_8Z$

$\angle A_2ZA_7 = \angle A_3ZA_8 = 18° \cdot 5 = 90°$

Из подобия $\dfrac{A_2A_3}{A_7A_8} = \dfrac{A_2Z}{A_7Z} = \dfrac{A_3Z}{A_8Z} \Rightarrow$

$\dfrac{A_2Z}{A_7Z} = \dfrac{A_3Z}{A_8Z} = \dfrac{A_2A_7}{A_3A_8}$, т.к. $\triangle A_2A_7Z \sim \triangle A_3A_8Z$

по углу и отнош. 2 пар сторон $\Rightarrow$

$\dfrac{A_2A_3}{A_7A_8} = \dfrac{A_2A_7}{A_3A_8}$ и $\angle A_3A_2A_7 = \angle A_7A_8A_3$, т.к. 4угольник $A_2A_3A_7A_8$ впис. $\Rightarrow$

$\triangle A_2A_3A_7 \sim \triangle A_8A_7A_3$, но тогда $\dfrac{A_2A_3}{A_7A_8} = \dfrac{A_2A_7}{A_3A_8} = \dfrac{A_3A_7}{A_3A_7} = 1$, т.е. $\triangle$ равны

$\Rightarrow$ $A_2A_3A_7A_8$ – р/б трапеция с основаниями A_3A_7 и A_2A_8, а это нехорошо...

„Лемма" из критерия не доказана, 20%.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-2-08		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	1	0	0	0	8
подписи членов жюри			Кулешов			

ЗАДАЧА № 11 . 6

ЛИСТ 1 ИЗ 1

(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)

М-11-2-08

ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Ответ: сможет

Пример: Пете выдаются гири с массами от 1г до 30г, Васе выдаются гири от 71г до 100г

Максимальное значение суммы масс 11 и 12 гирь у Пети это сумма 11 и 12 гирь с наибольшими весами, т.е. для 11 штук это с 20г по 30г, их сумма $\frac{(20+30)\cdot 11}{2} = 25\cdot 11 = 275$г, для 12 это гири с 19г по 30г, их сумма $275+19 = 294$г.

Минимальное значение суммы масс 11 и 12 гирь у Васи это сумма 11 и 12 гирь с наименьшими весами, т.е. для 11 штук это с 71г по 81г, для 12 это с 71г по 82г. Их суммы соответственно $\frac{(71+81)\cdot 11}{2} = 76\cdot 11 = 836$г и $836+82 = 918$г

Уравновесить не получится, так как 11 Петиных гирь это не более 275г, а 12 Васиных не менее 918г. 12 Петиных гирь это не более 294г, а 11 Васиных это не менее 836г.

7 б

ЗАДАЧА № 11 . 7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	м-11-2-08 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пусть A и B – координаты по Ox точек пересечения G_1 и G_2. Тогда A и B – корни уравнения $(p-1)x^2+qx+r=0$, т.к. в этих точках $px^2+qx+r=x^2$. Касательная к $f(x)=x^2$ выглядит как $y=2x_0(x-x_0)+x_0^2=2x_0x-x_0^2$ для точки $x_0 \Rightarrow$ Касательные в т. A и B имеют вид $y_1=2Ax-A^2$ и $y_2=2Bx-B^2$, приравняем их и найдём координату x точки пересечения.

$2Ax-A^2=2Bx-B^2$

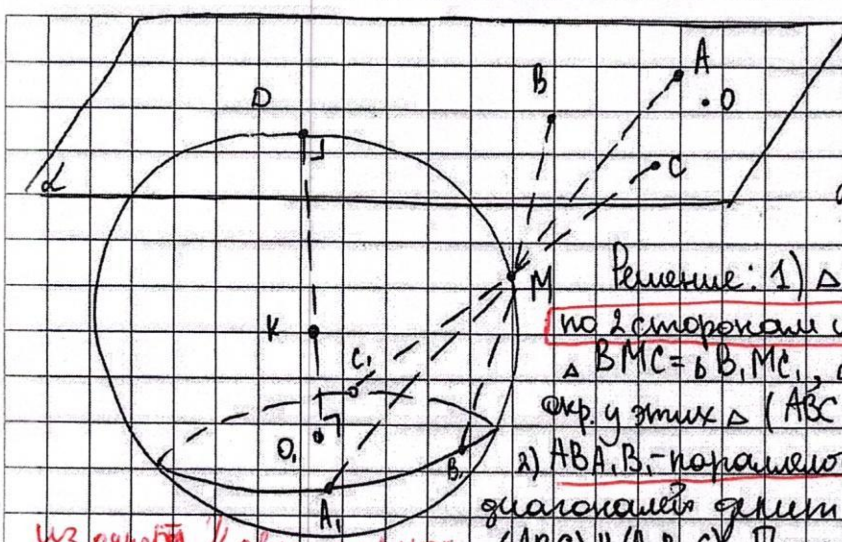
$2x(A-B)=(A-B)(A+B)$ $\quad A-B\neq 0$, т.к. есть 2 различные точки пересечения G_1 и $G_2 \Rightarrow$ $x=\frac{A+B}{2}$, $y=2A\cdot\frac{A+B}{2}-A^2=A\cdot B$, т.е. $C\left(\frac{A+B}{2}; A\cdot B\right)$ +

~~[illegible]~~. $C\in G_1 \Rightarrow$

$p\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+q\left(\frac{A+B}{2}\right)+r=A\cdot B$, при этом по Th Виета

$A\cdot B=\frac{r}{p-1}$, $A+B=\frac{q}{1-p}$ 1 б

ЗАДАЧА № 11. 8	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	m-11-2-08 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Пусть K – центр ω

O_1 – центр опис. окружности $\triangle A_1B_1C_1$

$\alpha = (ABC)$

Решение: 1) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C$ из равенства по 2 сторонам и углу м/у ними $\triangle AMC = \triangle A_1MC_1$, $\triangle BMC = \triangle B_1MC_1$, $\triangle AMB = \triangle A_1MB_1$ ⇒ радиусы опис. окр. у этих △ (ABC и $A_1B_1C_1$) равны, т.е. $OA = O_1A_1$

какой угол недоказано

2) ABA_1B_1 – параллелограмм (т.к. (·) пересечения диагоналей делит их пополам) ⇒ $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$. Плоскость $(A_1B_1C_1)$ в сечении сферы образует окружность, и т.к. (·) A_1, B_1, C_1 лежат на этой окружности, O_1 – её центр.

из одной ∥ двух прямых не ⇒ ∥ плоскостей

3) (·) K равноудалена от (·) M, A_1, B_1, C_1 ⇒ она равноуд. от (·) A_1, B_1, C_1, а ГМТ всех таких точек это прямая l, такая что $O_1 \in l$ и $l \perp (A_1B_1C_1)$, также т.к. (·) D – (·) касания сферы и плоскости ⇒ $KD \perp (ABC)$, но $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ ⇒ (·) K, O_1, D лежат на 1 прямой, которая ⊥ обеим плоскостям. ⇒ ГМТ всех точек, равноуд. от (·) D и (·) O_1, это такая плоскость β, что $\beta \perp DO_1$ (т.е. $\beta \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$) и проходит через середину DO_1

недоказано

4) Заметим, что β также является ГМТ всех точек, равноуд. от плоскостей (ABC) и $(A_1B_1C_1)$, т.к. параллельная плоскость, проходящая через данную точку, единственна, а также середина DO_1 равноудалена от плоскостей.
Заметим, что (·) $M \in \beta$, т.к. пусть h: $M \in h$, $h \perp (ABC) \Rightarrow h \perp (A_1B_1C_1)$, $h \cap (ABC) = (\cdot)\, H$, $h \cap (A_1B_1C_1) = (\cdot)\, H_1$, $\triangle MAH = \triangle MA_1H_1$ по гипотенузе и острому углу ⇒ $MH = MH_1 \Rightarrow MD = MO_1$

5) Докажем, что $MO = MO_1$. Давайте представим, что изначально (·) $O_1 = MO \cap (A_1B_1C_1)$, а теперь докажем, что это центр опис. окр. Тогда $MO = MO_1$, т.к. $M \in \beta$ (или из равенства $\triangle MHO = \triangle MH_1O_1$ по катету и острому углу) ⇒ $\triangle MO_1A_1 = \triangle MOA$, $\triangle MO_1B_1 = \triangle MOB$, $\triangle MO_1C_1 = \triangle MOC$ по 2 ст. и углу м/у ними ⇒ $A_1O_1 = B_1O_1 = C_1O_1 = AO = R \Rightarrow O_1$ – центр опис. окр-ти $\triangle A_1B_1C_1$ ⇒ центр. опис. окр. $\in MO \Rightarrow MO = MO_1 = MD$

0 б - ?