Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	
ШИФР	М-10-34		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	0	0	
подписи членов жюри						

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-34

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

10.1.

Нет.

д-во: от противного

Обозначим сторону квадрата за X, его площадь $S = X^2$. Очевидно, он не может состоять из прямоугольников, одна из сторон которых больше X. т.к. одна из сторон каждого прямоугольника равна 1, а другая сторона в зависимости от прямоугольника ~~принимает по~~ равна натуральному числу от 1 до 2024 включительно, то площади прямоугольников равны 1, 2, ..., 2024.

Рассмотрим случай, когда $X \leq 2024$, т.к. квадрат состоит из любого числа прямоугольников, длина площадь которых не превышает X, а его площадь X^2 - сумма площадей этих прямоугольников (их нельзя накладывать друг на друга или оставлять пустые клетки), числа 1, 2, ..., X - арифметическая прогрессия, то $X^2 \leq \frac{1+X}{2} \cdot X$ по условию $X \in N \Rightarrow$

$X \leq \frac{1+X}{2}$, $2X \leq 1+X$, $X \leq 1$, противоречие с условием. +

(+)

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-34

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Действительно, мы можем не включать в квадрат любой прямоугольник или несколько прямоугольников площадью вплоть до X, ~~от чего превысить~~ а т.к. включить прямоугольник с площадью большей x мы не можем, превысить ~~арифметическую прогрессию нельзя~~ сумму членов арифметической прогрессии нельзя.

Рассмотрим случай, когда $X > 2024$. Сумма всех площадей всех прямоугольников равна $\frac{1+2024}{2} \cdot 2024 = 1012 \cdot 2025 = 2024 \cdot 1012 + 1012$, однако это меньше $2024 \cdot 2024$, отчего квадрат со стороной, большей 2024 также нельзя построить.

7.

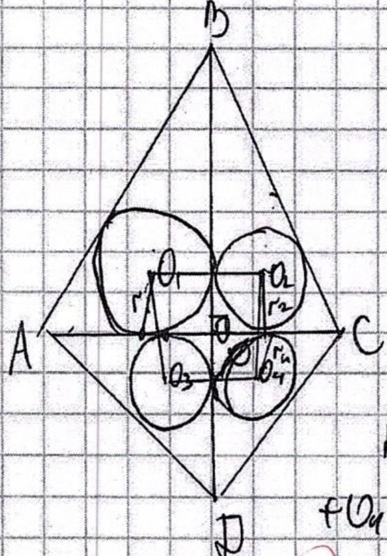
Ответ: Нет.

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-34

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

10.5.



Дано: $AC \perp BD$ $AC \cap BD = (\cdot)O$

$O_1(r_1)$ вписана в $\triangle ABO$

$O_2(r_2)$ вписано в $\triangle BCO$

$O_3(r_3)$ вписано в $\triangle AOD$

$O_4(r_4)$ вписана в $\triangle DOC$

~~Дать~~ Д-ть: $r_1+r_2+r_3+r_4 \le 0{,}5(O_1O_2+O_2O_4+O_4O_3+O_3O_1)$? не те центры!

Д-во: Рассмотрим ситуацию, когда $r_1+r_2+r_3+r_4 = 0{,}5 \cdot (O_1O_2+O_2O_4+O_3O_4+O_1O_3)$. Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $O_1(r_1)$ касается O_2, $O_2(r_2)$ касается $O_4(r_4)$, $O_4(r_4)$ касается $O_3(r_3)$ и $O_3(r_3)$ касается $O_1(r_1)$. В самом деле, тогда ~~P~~ = периметр $O_1O_2O_4O_3$ — $P = 2r_1+2r_2+2r_3+2r_4 = 2(r_1+r_2+r_3+r_4)$

Это следует из свойств касающихся окружностей.

Если же окружности не касаются друг друга, то расстояние между их центрами больше суммы радиусов (если одна окружность не ~~лежит в~~ пересекает другую), в противном случае они бы касались, ч. т. д.

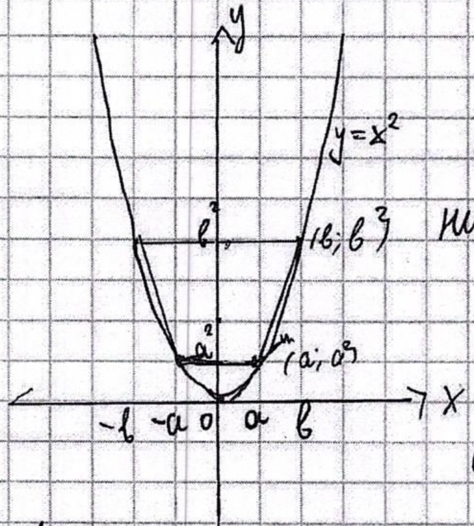
−

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-34

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

10.2



Обозначим ~~по~~ за a ~~точку~~ координату оси X ~~так, что~~ пересечения меньшего основания с параболой и $x = b$, в которой большее основание пересекает параболу, $a, b > 0$. Симметрично выделим $-a$ и $-b$.

Уравнение прямой меньшего основания: $y = a^2$; большего основания $y = b^2$. Длина меньшего основания из соображений симметрии $2a$, большего $2b$. Известно, что $2ab = k$

Уравнение прямой бокового основания в первой четверти:

$y = px + q$ Симметрично в IV четверти $y = -px + q$.

$px + q = -px + q \Rightarrow 2px = 0$, но $p \neq 0 \Rightarrow x = 0$.

в ~~этом случае~~ в координате $(0;\ q)$ пересекаются боковые основания. Докажем, что ~~при~~ $k = const \Rightarrow$

$q = const$

$$\begin{cases} pa + q = a^2 \\ pb + q = b^2 \end{cases} \Rightarrow p(a-b) = (a-b)(a+b), \quad \Big| : a - b \neq 0$$

75.

$$p = a + b \Rightarrow (a+b)a + q = a^2$$

$a^2 + ab + q = a^2 \quad ab = -q \quad k = -q \quad k = const \Rightarrow -q = const$

$\Rightarrow q = const$, ч. т. д.

10.4.

В ряд последовательных натуральных чисел от 1 до 1000 – арифметическая прогрессия. Сумма первых 500 членов $S = \frac{501}{2} \cdot 500 = 125250$

„Разбавить" этот ряд можно не более 250 числами, в противном случае ряд сместится и всё равно разбавится меньшим количеством чисел. От перестановки чисел и смещения ряда сумма чисел не изменится.

Сумма чисел от 750 до 1000:

$S = \frac{750 + 1000}{2} \cdot 250 = 21875$. В других 250 числах (любых) от 500 до 1000 сумма очевидно меньше. Без учёта того, что из ряда от 1 до 500

0 б

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	м-10-2-34		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	0	0	
подписи членов жюри						

ЗАДАЧА № 10. 6 | ЛИСТ 1 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-2-34 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Нет.

Для начала выясним, что уравнение симметричное: x, y, z — взаимозаменяемые. Действительно, неизвестные все в знаменателе, при x^2+x+1, y^2+y+1, z^2+z+1 одинаковые коэффициенты при второй, ~~ед~~ первой и нулевой степени соответственно. Все действия, проводимые с x, вследствие симметрии, аналогично проводятся с y и z.

Пусть $x^2+x+1=a$. $\Rightarrow$ $x^2+x+1-a=0$

почему здесь?

$D=$ ~~b^2~~ $1+4a-4=4a-3$, по условию $D\geq 0$

$a\geq 0{,}75$. Пусть $y^2+y+1=b$, $z^2+z+1=c$. Аналогично $b\geq 0{,}75$, $c\geq 0{,}75$. Имеем уравнение

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. При $a=b=c=0{,}75$ имеем:

$\frac{1}{0{,}75}+\frac{1}{0{,}75}+\frac{1}{0{,}75}=\frac{3}{0{,}75}=3\cdot\frac{4}{3}=4$; уравнение, казалось бы, имеет решение. Однако при $a, b, c=0{,}75$ ~~дискрим~~ $D=0$ для ~~т~~ всех трёхчленов на букву x, y, z.

Отсюда у каждого трёхчлена один корень, причём $x=y=z$, противоречие с условием.

см. другой бланк

ЗАДАЧА № 10. 6	ЛИСТ 2 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-34 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

т. к $a, b, c \geq 0,75$, а функции $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ убывающие (с увеличением a, b, c значения этих функций соответственно уменьшаются), то их сумма не достигнет 4 уже больше никогда, ч. т. д.

Ответ. Нет.

+

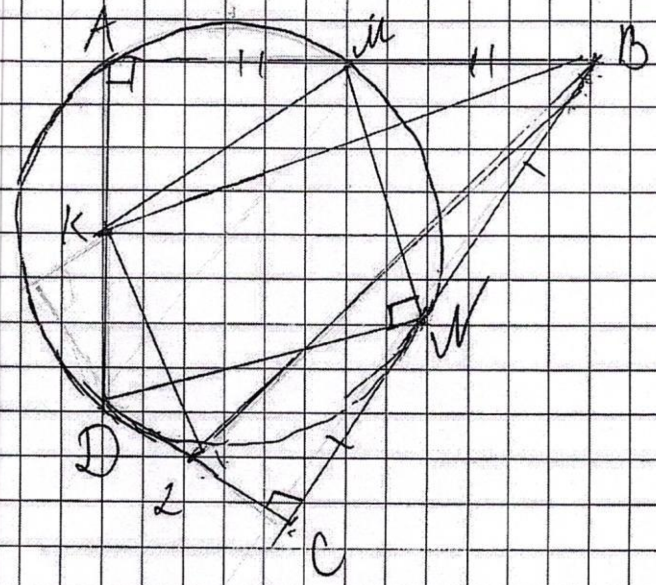
ЗАДАЧА № 10. 7	ЛИСТ 3 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-34 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Да.

Д-во: В качестве примера можно привести ряд чисел от 1234567890 0 до 1234567890 9. В этих числах меняется только последняя цифра, т.к. не происходит смены 9 → 0, поскольку число, оканчивающееся на 9 — десятое в ряду. Первые десять цифр числа неизменны, чисел 10, поэтому эти цифры встречаются 10 раз. Последняя цифрой успели побывать все 10 цифр, поэтому каждая ~~число~~ цифра встретилась 11 раз.

Ответ. Да.

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 4 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-34 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Дано: $\angle A = \angle C = 90°$, $AM = MB$, $BN = NC$,
$AMND$ вписан в окружность, $AK = KD$, $LD = CL$

Д-ть: $BCLK$ вписан в окружность

Р-во: $\angle N = \angle A = 90°$, т.к. $AMND$ вписанный.

Д-м, что $\angle BKL = 90°$ Для этого ~~по теореме Пифагора~~
докажем, что $BK^2 + KL^2 = BL^2 = BC^2 + CL^2$ (по Th. Пифагора)

−

ЗАДАЧА № 10. 9 | ЛИСТ 5 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-2-34 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

~~a = b = c = 1~~,

Заметим, что если a, b, c одновременно чётные, то делимое станет нечётным, а делители останутся чётными, из-за чего a, b, c не являются одновременно чётными, ведь ~~то~~ делимое не поделится на делитель ~~т.к. делитель простой~~, то вообще a, b, c должны быть одновременно нечётными

0Б

ЗАДАЧА № 10.10	ЛИСТ 6 ИЗ 6 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-10-2-34 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Разобъём людей на пары. Для удобства назовём человека ~~тем~~ номером, ~~по~~ численно равному количеству названных друзей. Пары получаются следующим образом: люди, сумма названных друзей которых равна 2023, становятся в пару:

~~Рыцарь~~ Человек №2023 – Человек №0

...

Человек №1012 – Человек №1011

Т.к. максимальное число друзей может быть 2023 (по условию дружба с собой любимым не считается), а соврать можно на 1 от реального числа, то в паре №2023 – №0, очевидно, один лжец минимум. Либо у №0 есть 1 друг, либо у №2023 2022 друга, включая №1. Вне зависимости от случая, №1 дружит с №2022 (3? 2), №0 не дружит и с №2022 (т.е. получается у №2022 2021 друг. Применяя такие суждения к каждой паре, получим, что минимально в каждой из $\frac{2024}{2} = 1012$ пар есть один лжец.

неверно!

Пример необоснован!

Ответ: 1012 лжецов

0б