Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-27		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	4	0	0	
подписи членов жюри						

Задача 1

Шифр М-10-27

№1

Ответ: нет.

Д-во: (от противного):

1) пусть составить можно и мы это сделали, получив квадрат $X \times X$ (с длиной стороны $= X$)
2) так как длина стороны квадрата $= X$, то в нём не может быть прямоугольника размерами больше, чем $1 \times X$ (иначе не получится)
3) таким образом, все прямоугольники, использованные в квадрате, имеют размеры от 1×1 до $1 \times X$. Значит, ~~их~~ суммарная площадь всех прямоугольников, использованных в квадрате $\leq$ сумме площадей всех от 1×1 до $1 \times X$.
4) Посчитаем суммарную площадь всех прямоугольников от 1×1 до $1 \times X$. Она равна $\frac{1+X}{2} \cdot X$.
5) Сумма всех использованных прямоугольников площадей равна ~~ее~~ площади получившегося квадрата, то есть, равна $x \cdot x = x^2$.

Очевидно, что сумма площадей всех использованных прямоугольников $\leq$ сумме площадей всех прямоугольников от 1×1 до $1 \times X \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \leq \frac{x(1+x)}{2} \Rightarrow 2x^2 \leq x^2 + x \Rightarrow \boxed{x^2 \leq x}$

по условию $\Rightarrow X > 1 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ Ответ: нет.

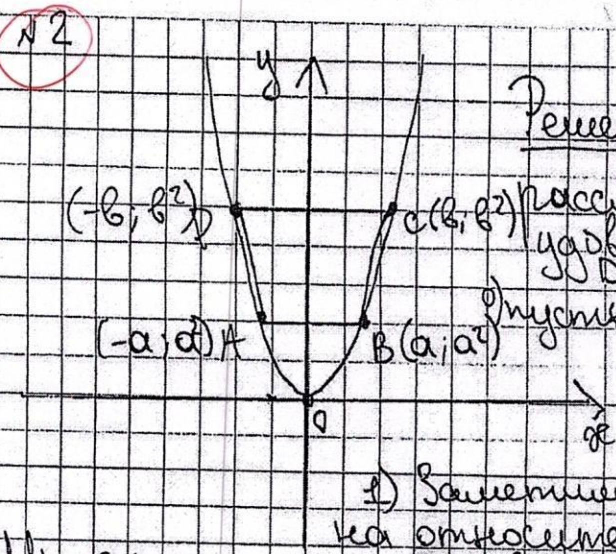
+

+

1 из 7 страниц

Задача 2 | **Шифр** | M-10-27

№2



Решение:

рассмотрим произвольную трапецию ABCD, удовлетворяющую условию $DC \parallel AB$, $|DC \cdot AB| = k$; вписанную в параболу.

2) пусть координаты $B(a; a^2)$, и ~~тогда~~ $C(b; b^2)$

1) Заметим, что парабола симметрична относительно оси Oy.

2) Мы знаем, что основания параллельны $Ox \Rightarrow$
$\Rightarrow DC \parallel AB \parallel$ оси $Ox \Rightarrow$ (·) D и (·) C равноудалены от $Ox \Rightarrow$
$\Rightarrow$ их игреки совпадают, а, так как они лежат по разные стороны от $Oy \Rightarrow$ их иксы будут противоположны (так. $f(x) = x^2$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ аналогично у (·) A и (·) B иксы противоположны и игреки равны. $\Rightarrow A(-a; a^2)$; $D(-b; b^2)$.

3) ~~сторона~~ по условию $\Rightarrow DC \cdot AB = k$;
так как $D(-b; b^2)$ и $C(b; b^2) \Rightarrow |DC| = 2b$ и, аналогично,
$A(-a; a^2)$, $B(a; a^2) \Rightarrow |AB| = 2a. \Rightarrow 2a \cdot 2b = k \Rightarrow$
$\Rightarrow a \cdot b = \frac{k}{4}$ (1) (равенство №1)

4) CB — ~~прямая~~ отрезок прямой. Пусть эта прямая задаётся функцией $y = mx + n$.
тогда система $\begin{cases} y = mx + n; (1) \\ y = x^2; (2) \end{cases}$ имеет только 2 решения — это точки (·) C и (·) B

решим систему $(1) = (2) \Rightarrow mx + n = x^2$;
$x^2 - mx - n = 0$;

2 из 7 страниц

Задача 2 **Шифр** м-10-27

№2 (продолжение)

$x^2 - mx - n = 0$;

по Т. Виета, если x_1 и x_2 — корни данного уравнения $\Rightarrow$ $x_1 \cdot x_2 = -n$;

Заметим, что корнями этого уравнения являются ~~числа~~ иксы точек B и C $\Rightarrow$ $a \cdot b = -n$;

используя равенство №1, получаем, что

$a \cdot b = \frac{k}{4} \Rightarrow -n = \frac{k}{4} \Rightarrow n = -\frac{k}{4}$.

Значит, для произвольной трапеции, уравнение прямой, на которой лежит боковая сторона трапеции (в первой координатной четверти) будет вида $y = mx - \frac{k}{4}$; где m будет ~~зав~~ своим для каждой трапеции, а $\left(-\frac{k}{4}\right)$ будет одинаковым для всех трапеций с одинаковым k.

5) Заметим, что трапеция (равнобедренная) и парабола симметричны относительно Oy $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если CB лежит ~~лежит~~ на прямой с уравнением ~~$y = mx - \frac{k}{4}$~~ $y = mx - \frac{k}{4}$; то AD будет лежать на прямой с уравнением $y = -mx - \frac{k}{4}$; так как эти прямые также симметричны относительно Oy.

6) Значит, для ~~оф~~ фиксированного k все прямые, лежащие на продолжениях боковых сторон, имеют уравнения вида $y = -mx - \frac{k}{4}$ либо $y = mx - \frac{k}{4}$; где m — различное, а k — одинак. для всех.

Заметим, что при $x = 0$ все эти уравнения принимают значение $= -\frac{k}{4}$ $\Rightarrow$ всем прямым принадлежит точка $(0; -\frac{k}{4})$ и они в ней пересекаются.

ч.т.д.

+

Задача 3

Шифр	М-10-27

№3

1) Заметим, что Зоя всегда может ~~раскрасить точку~~ найти такую точку, у которой есть хотябы 1 соседа (кроме 1ого хода), и раскрасить её в противоположный цвет. ~~Зо~~ Гарантировать это мы можем, т.к. ~~Зоя ходит первой, всего точек~~ всегда среди всех незакрашенных точек найдутся те, у которых есть хотябы 1 раскрашенный сосед (кроме первого хода). +

При такой стратегии, за каждый ход (кроме первого) она будет красить соседа другой точки в противоположный цвет, и тогда за один ход будет образовываться хотябы 1 пара разно-цветных соседей. + Если у белой точки два соседа разных цветов, можно покрасить любым цветом, ведь всё равно этот цвет будет отличаться от одной из соседних точек и образует с ней пару. Всего у Зои 50 ходов, и, гарантированно, на каждом из них (кроме первого), она будет создавать новую пару разноцветных соседей. Поэтому таких пар гарантировано не меньше 49 штук. +

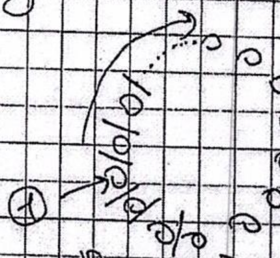
4 из 7 страниц

Задача 3

Шифр М-10-27

№3 (продолжение)

Докажем, что тогда их хотябы 50, для этого докажем, что их будет чётное число.



представим уже все покрашенные точки. Назовём границей переход от одной точки к соседней для неё.

Возьмём и пометим произвольную точку цифрой 1. Сделаем обход по часовой стрелке, начиная с точки под номером 1. Заметим, что переходя границу от одной точки к соседней цвет либо меняется либо не меняется. После полного обхода цвет возвращается к изначальному, а, значит, что при переходе через границы, цвет менялся на другой чётное число раз. (+) Если при переходе от одной точке к другой меняется цвет, то это значит, что пара этих двух соседних точек является разноцветной. Поэтому, пар двух соседних разноцветных точек будет всегда чётное число, и, гарантированно, хотя бы 49. Поэтому, таких пар точек ~~не~~ будет гарантированно хотябы 50. ч.т.д. (+)

Ответ: 50 пар точек.

2б +2

5 из 7 страниц

Почему ЗО8 не может добиться большего числа разных пар?

Задача 4 | Шифр | И-10-27

№4.

1) возьмём, и для всех чисел сделаем следующее: ~~для~~ выпишем все числа n_i, сколько?! это важно!

что n_i для первого числа = этому числу, а остальные: $n_i = n_{i-1} + i$-ое число.

то есть если числа $a, b, c, d, e, \ldots$;

то выпишем a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$, $a+b+c+d+e$, … и так далее. $\underbrace{1\ 2\ 3\ 4}$ → 1, 3, 6, 10 для 1; 2, 5, 9 для 2; 3, 7 для 3; 4 для 4 ? 1, 3, 6, 10!

2) Рассмотрим выписанные числа: они могут принимать значения от 1 (если она стоит первой) до $1001 \cdot 500 = 500500$ (для последнего числа это значение точно будет, и оно будет выписано последним).

~~Д-м: это~~ (от противного): $n_i \notin [100000, 100500]$

1) пусть нет таких подряд стоящих чисел, что их сумма $\in [100000; 100500]$.

2) ~~но~~ Заметим, что все выписанные числа n_i не в пункте 2 такие, что: для любых i и j выполнено, что $n_j - n_i$ = сумма всех изначальных чисел с $i+1$ по j место.

3) из предположения о противном следует, что никакая разность $n_j - n_i$ для ~~произ~~ мо-

6 из 7 страниц

Задача 4 | Шифр М-10-27

№4 (продолжение)

были i и j не лежит в ~~промежутке~~ (100000; 100500]

4) возьмем числа n ~~$_{100}$, n_{200}, n_{300}, ..., n_{1000}~~.

для каждого i из значений выполнено следующее: из-за предположения о противном ⇒ среди всех чисел остальных среди n не может встречаться число $n_k \in (n_i + 100000;$ ~~...~~ $n_i + 100500]$ и не может быть $n_k \in (n_i - 100000; n_i + 100500]$ ⇒ выполнено?

⇒ каждое число ~~по~~ ~~зну~~ ~~от~~ убирает хотя бы 500 вариантов для других чисел. ⇒ подробнее?

⇒ противоречие с тем, что все числа различны.

ч.т.д. не очевидно! 0б

7 из 7 страниц

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ | М | А | Т | Е | М | А | Т | И | К | А

КЛАСС 10

ШИФР М-10-2-27

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1 6	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	0	7	0	1	0	
подписи членов жюри		Каир	Каир			

Задача 106 | **Шифр** М-10-2-27

№106

Ответ: нет, не могут

Док-во: (от противного):

пусть существуют такие вещественные числа x, y, z; что $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}=4$;

обозначим так:
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+x+1}=a; & (1) \\ \frac{1}{y^2+y+1}=b; & (2) \\ \frac{1}{z^2+z+1}=c; & (3) \\ a+b+c=4; & (4) \end{cases}$$

в таком случае, x, y, z являются решениями уравнений (1), (2), (3) соответственно. Все ~~эти~~ уравнения одного вида, поэтому, не умаляя общности, рассмотрим только одно из них.

$(1) \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2+x+1}=a;$

$x^2+x+1=\frac{1}{a};$

$x^2+x+1-\frac{1}{a}=0;$ Следовательно, раз у этого уравнения на x, от является корнем дискриминант должен быть ~~положительным~~ неотрицательный.

D(дискриминант) $=1-4\left(1-\frac{1}{a}\right)=1-4+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}-3.$

Задача 10б **Шифр** М-10-2-27

№10б (продолжение)

Аналогично, у (2) $D = \frac{1}{b} - 3$ и у (3) $D = \frac{1}{c} - 3$.

~~Что~~ Из-за того что все три уравнения имеют по хотябы одному корню, их дискриминанты неотрицательны $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - 3 \geq 0; & (1) \\ \frac{1}{b} - 3 \geq 0; & (2) \\ \frac{1}{c} - 3 \geq 0; & (3) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1-3a}{a} \geq 0; \Rightarrow \cancel{a \geq \frac{1}{3}}$ $\frac{3a-1}{a} \leq 0; \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = 0, \Rightarrow$ по методу интервалов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $+$ 0 $-$ $\frac{1}{3}$ $+$ $\Rightarrow a \in (0; \frac{1}{3}]$, -

аналогичным является решение неравенств (2) и (3) $\Rightarrow b \in (0; \frac{1}{3}]; c \in (0; \frac{1}{3}]$ и $a \in (0; \frac{1}{3}]$

Таким образом, максимальное значение, ??? Почему при $a = 1/3$ max-1
принимаемое суммой $a+b+c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$; что противоречит условию $a+b+c = 4$.

ч.т.д.

Ответ: нет, не могут.

0б

Задача 7 | **Шифр** М-10-2-27

№7.

Ответ: да, могли

Пример: это могли быть числа

12345678900,
12345678901,
12345678902,
12345678903,
12345678904,
12345678905,
12345678906,
12345678907,
12345678908,
12345678909,

всего здесь встречается
1 – 11 раз
2 – 11 раз
3 – 11 раз
4 – 11 раз
⋮
9 – 11 раз
0 – 11 раз

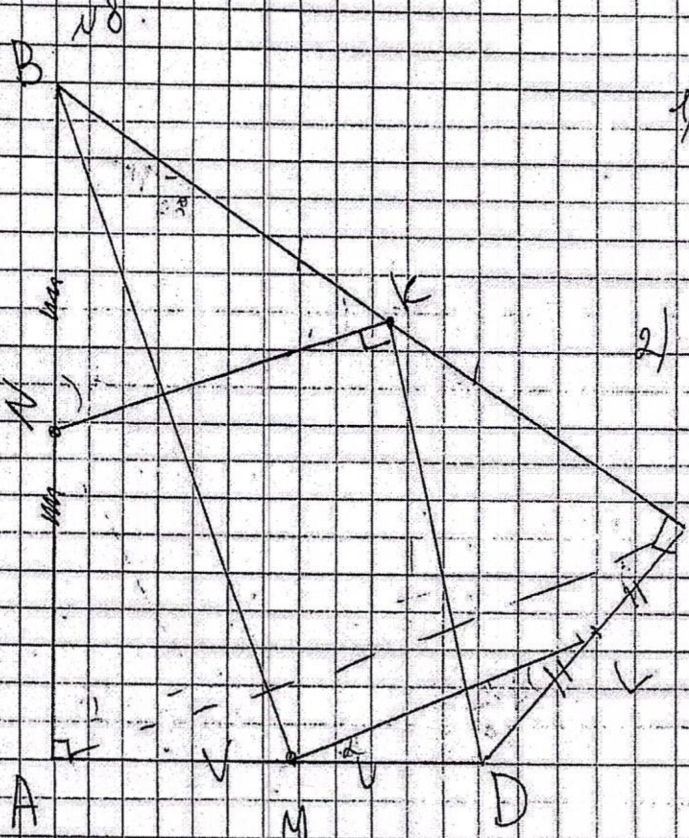
Все цифры от 0 до 9 встречаются здесь по 11 раз и это 10 последовательных чисел, поэтому эти числа удовлетворяют условию.

Ответ: да

+

3 из 8 страниц

Задача 8 | **Шифр** М-10-2-27



1) Отметим середины сторон как точки A, B, C, D. ?

2) точки A, N, K, D ∈ ∈ одной окружности ⇒ ⇒ ~~сумма~~ ∠NAD + ∠NKD = 180°, ∠NAD = 90° ⇒ ∠NKD = 90°.

3) Заметим, что NK – ср. линия AC, и ML – ср. линия AC. ⇒ ⇒ NK ∥ AC и ML ∥ AC ⇒ ⇒ KN ∥ ML ⇒

⇒ чтобы доказать, что BM ⊥ ML, надо доказать, что BM ⊥ KD, ведь KN ∥ ML всегда (по п.3) ч.т.д. 0 б.

Задача 9 | **Шифр** М-10-2-27

№9

не умаляя общности, задача симметрична относительно a, b, c. $\Rightarrow$ проверим чётность

① Если a, b, c нечётные $\Rightarrow$

$\Rightarrow ab+c$ – чётное, $bc+a$, $ac+b$ – тоже чётные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ они должны быть простыми, а простое чётное число единственное $= 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+c=2=bc+a=ca+b \Rightarrow$

$\Rightarrow a=b=c=1 \Rightarrow$ одна из пар решений – $a=1$; $b=1$; $c=1$; подходит, так как 2 – это делитель простого числа 8 $(2\cdot2\cdot2)$

② Если a – ч, b – ч, c – нечётное $\Rightarrow$

$\Rightarrow a+bc$ – ч, $b+ac$ – ч, $c+ab$ – $\cancel{ч}$ н;

и ~~однако~~ $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) =$ н·н·ч.

однако простые числа $a+bc$ и $b+ac$ – чётные $\Rightarrow$

$\Rightarrow a+bc = b+ac = 2 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow$ противоречие с тем, что a и b – чётные

почему? $a=b$ или $c=1$

③ Если a, b, c – чётное $\Rightarrow$

$\Rightarrow ab+c$, $b+ac$, ~~$c+$~~ $a+bc$ – чётные $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) =$ н·н·н $=$ н $\Rightarrow$ у нечётного числа не может быть чётных простых делителей $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие.

ННZ

Задача 9 | **Шифр** М-10-2-27

№9 (продолжение)

4) Так же заметим, что a, b, c – вз. различные (за искл-ем единицы), ведь иначе, если, например $a = b = x \Rightarrow$

$\Rightarrow a+bc \vdots x$ и $b+ac \vdots x$ и $x \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ что противоречит условию Какому?

5) Аналогично, если $a, b, c \neq 1$, они взаимно простые (аналогично пункту №4)

6) Также, если $a, b, c > 2$, то

$a+bc > 6$, $b+ac > 6$ и $c+ab > 6$;

однако $a^2+1 > 5$, $b^2+1 > 5$ и $c^2 > 5$,

поэтому случаи, когда $a, b, c > 2$,

нам не подходят Почему?

7) Поэтому рассмотрим все случаи, когда $a, b, c \leq 2$. Не умаляя общности, пусть $a \leq b \leq c \Rightarrow$ ① 1 1 1 – подходит (проверено выше)

② 1 1 2 $\Rightarrow$ не подходит, т.к. 2·2·5 не делится на 3

③ 1 2 2 $\Rightarrow$ не подходит, т.к. 4 не простое число

④ 2 2 2 $\Rightarrow$ не подходит, т.к. 6 – не простое число.

Варианты, когда $a, b, c > 2$ не подходят, т.к. тогда $ab+c$, $a+bc$ и $b+ac$ растет быстрее, чем $(a^2+1), (b^2+1), (c^2+1)$

Ответ: $(1; 1; 1)$

1б!

Задача 10 | **Шифр** М-10-2-27

№10

а) Заметим, что не может быть так, что лжецов нет. Если бы все были рыцарями, то человек, сказавший 2023, знаком со всеми остальными, однако, это противоречит тому, что тот, у кого 0 друзей ни с кем не знаком. Значит, хотя бы 1 лжец точно есть. +

1) Хотя бы кто-то из двух людей, сказавших 0 и 2023, лжец (это следует из п.0) ⇒

⇒ пусть лжец среди них только один, тогда есть 2 случая:

① Это тот, кто сказал 0;

тогда на самом деле у него 1 друг. Однако в этой ситуации, тот, кто сказал 2023 знаком со всеми, а, значит, тот, кто сказал 1 и тот, кто 0, знакомы только с ним. Однако, если человек, сказавший 2022 говорит правду, он не знаком только с одним ⇒ противоречие а если он 1ж?

② Это тот, кто сказал 2023:

тогда на самом деле у него 2022 друга

~~В такой ситуации он не знаком только с двумя~~ тогда вся сумма степеней вершин графа дружбы 2024х людей $= (2022+1)\cdot 1011 + 2022$

Откуда?

7 из 8 страниц

Задача 10

Шифр М-10-2-27

№10 (продолжение)

– а это нечётное число => противоречие.

2) Можно заметить, что изначально сумма степеней вершин – число чётное =

$= \frac{2023+1}{2} \cdot 2023 = 1012 \cdot 2023$ – чётное

Сумма степеней должна быть чётной, чтобы граф существовал. Все лжецы меняют число друзей на 1 => число лжецов должно быть чётным, чтобы сумма степеней была чётной. Минимальное чётное число, $\neq 0$ => 2

3) Рассмотрим ситуацию, если лжецов двое.

Пример на 2х лжецов:

Лжецы – тот, кто сказал 0 → на деле – 1 друг и тот, кто сказал 2023 → на деле – 2022 друга =>

=> сумма ~~ст~~ степеней будет =

а точно все остальные Р?

$= \frac{2022+2}{2} \cdot 2022 + 1 + 2022 =$

$= 2023 \cdot 1011 + 2023 = H + H = Ч$ =>

=> подходит

Ответ: 2 лжеца

0 б

8 из 8 страниц.