Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА — КЛАСС:

ШИФР: М-10-19

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	0	0	
подписи членов жюри						

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-19

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 10.1.

Пусть Олег выбрал некоторое количество прямоугольников, наибольший из которых ~~площадью~~ размера $1\times n$. Это значит, что площадь составленного из них квадрата должна быть минимум n^2. Площадь наибольшего прямоугольника равна n, поэтому оставшиеся прямоугольники должны суммарно быть площади n^2-n, или $n(n-1)$. Мы взяли $1\times n$ как наибольший прямоугольник, поэтому Олег может брать прямоугольники размерами от 1×1 до $1\times(n-1)$, их площади будут составлять $1, 2, \ldots, (n-1)$. Поэтому их суммарная площадь будет равна $1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)=\frac{(n-1)\cdot(n-1+1)}{2}=$ $=\frac{n(n-1)}{2}$, что меньше $n(n-1)$. Поэтому даже если мы возьмём все прямоугольники размерами $1\times1, \ldots, 1\times(n-1)$, мы не сможем составить квадрат площадью n^2. Поэтому Олег не сможет составить квадрат площадью больше 1.

Ответ: нет

7

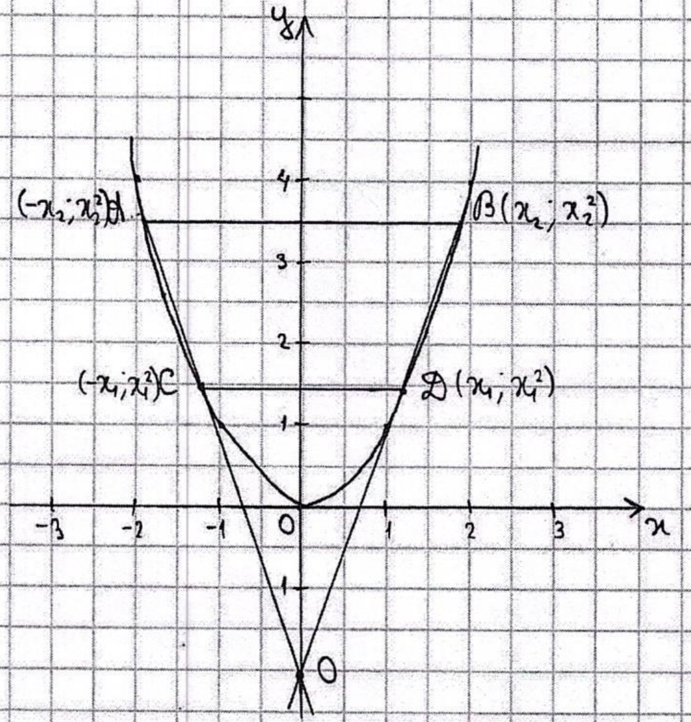
№ 10.2.

Рассмотрим трапецию $ABCD$, вписанную в параболу $y=x^2$, с основаниями AB и CD, такую, что $AB\cdot CD=k$

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-19

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.



Обозначим координаты точки $D(x_1; y_1)$, так как данная трапеция лежит на параболе, $y_1 = x_1^2 \Rightarrow D(x_1; x_1^2)$, так как $CD \parallel Ox$ и $AB \parallel Ox$ по условию, то $C(-x_1; x_1^2)$. Обозначим координаты точки $B(x_2; x_2^2)$, тогда $A(-x_2; x_2^2)$

Прямые AC и BD пересекаются в точке O, найдём уравнение прямой BD, оно имеет вид $y = kx + b$, подставим координаты точек B и D и решим систему:

$$\begin{cases} x_1^2 = kx_1 + b & (1) \\ x_2^2 = kx_2 + b & (2) \end{cases}$$

1. Вычитаем (2) из (1), получим: $x_1^2 - x_2^2 = k(x_1 - x_2)$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = k(x_1 - x_2) \,\Big|\, : (x_1 - x_2),\ x_1 \neq x_2$$

$$k = x_1 + x_2$$

2. $b = x_1^2 - kx = x_1(x_1 - k) = x_1(x_1 - x_1 - x_2) = -x_1 x_2$

Значит, уравнение прямой BD: $y = (x_1 + x_2)x - x_1 x_2$

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-19

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Найдём уравнение прямой AC, оно также имеет вид $y=kx+b$, подставим координаты точек A и C:

$$\begin{cases} x_1^2=-kx_1+b \\ x_2^2=-kx_2+b \end{cases}$$

1. $x_1^2-x_2^2=-kx_1+kx_2$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)=-k(x_1-x_2) \mid :(x_1-x_2),\ x_1\neq x_2$

$k=-(x_1+x_2)$

2. $b=x_1^2+kx_1=x_1(x_1+k)=x_1(x_1-x_1-x_2)=-x_1x_2$

$\Rightarrow$ уравнение прямой AC $y=-(x_1+x_2)x-x_1x_2$

Найдём координату точки пересечения AC и BD, точки O:

$y_0=(x_1+x_2)x_0-x_1x_2=-(x_1+x_2)x_0-x_1x_2$

$(x_1+x_2)x_0=-(x_1+x_2)x_0 \Rightarrow x_0=0$, значит, точка O лежит на оси ординат

$y_0=(x_1+x_2)\cdot 0-x_1x_2=-x_1x_2 \Rightarrow$ координаты точки $O(0;-x_1x_2)$

По условию, $AB\cdot CD=k$, длина $AB=x_2-(-x_2)=2x_2$, длина $CD=x_1-(x_1)=2x_1 \Rightarrow AB\cdot CD=2x_1\cdot 2x_2=4x_1x_2=k\Rightarrow x_1x_2=\frac{k}{4}$.

Значит, координата точки $O\left(0;-\frac{k}{4}\right)$ (она не зависит от x_1 и x_2) $\Rightarrow$ для любой трапеции, вписанной в параболу $y=x^2$, произведение длин оснований которой равно k и основания которой параллельны Ox, продолжения боковых

7

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

сторон пересекаются в точке $(0; -\frac{k}{4})$. Значит, продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.

ч.т.д.

№10.3.

Так как начинает Оля, а всего 100 ходов, то последний ход будет Васи. Первым ходом Оля покрасит в первый цвет. Пусть Вася действует так, чтобы добиться наименьшего возможного количества разноцветных соседних пар. Тогда он должен будет покрасить одну из двух соседних к покрашенной точке в её цвет (в первый цвет), и у него есть один вариант цвета. Оля своим вторым ходом точно сможет соединить первую точку в пару с какой-то из соседних. После второго хода Оли у Васи будет два варианта, в какой из цветов покрасить следующие точки (по порядку с обеих сторон от первой), при этом если он покрасит точку со стороны, где уже образовалась пара, Оля сможет соединить точки в пару с другой стороны, но если Вася покрасит точку рядом с той, у которой ещё нет пары (с другой стороны), Оля всё равно сможет соединить в пару с другой стороны, при этом одна точка войдёт в две пары. Таким образом, после

есть ещё другие точки

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

третьего хода Оли будет две пары соседних разноцветных точек, после четвёртого – три, и так далее. После второго хода Оли Вася может выбирать среди двух цветов, после третьего – только из одного, после четвёртого – ~~то~~ из двух, и так далее.

Предпоследний ход будет у Оли, это будет 99-ый ход во всей игре и 50-й ход Оли, так как каждый походит 50 раз. После этого хода будет 49 разноцветных пар, и Вася сможет выбирать среди двух цветов. Но в этом месте круг будет замыкаться, поэтому с одной стороны будет зелёный цвет, а с другой – синий, и какой цвет бы Вася не поставил, образуется ещё одна разноцветная пара точек. Всего 50.

Вася должен бы ходить таким образом, чтобы не допустить больное количество пересекающихся пар (т.е. пар, в которые входит ~~одн~~ общая точка).

Таким образом, Оля может гарантировать, даже при таких действиях Васи, себе 50 ~~т.~~ пар разноцветных соседних точек.

Ответ: 50.

−

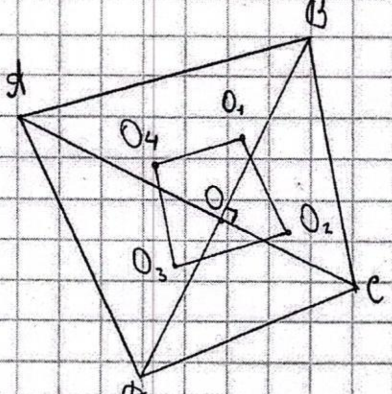
Красить можно любые точки, а не только соседние с покрашенной

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-19

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№10.5.



Пусть центр вписанной окружности $\triangle ABC$ – это O_1, $\triangle BCD - O_2$, $\triangle ACD - O_3$, $\triangle DAB - O_4$.

$O_1O_2O_3O_4$ – выпуклый четыр-ник

$BC \perp AD \Rightarrow \triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOA$ – прямоугольные треугольники.

Обозначим ~~Пусть~~ радиусы вписанных окружностей $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD$ и $\triangle DOA$ как r_1, r_2, r_3, r_4.

Найдём радиусы (радиус прямоуг. Δ-ка $r = \frac{a+b-c}{2}$, где c - гипотенуза)

$r_1 = \frac{AO+BO-AB}{2}$, $r_2 = \frac{BO+CO-BC}{2}$, $r_3 = \frac{CO+DO-CD}{2}$, $r_4 = \frac{DO+AO-AD}{2}$

другие Δ-ки

тогда $r_1+r_2+r_3+r_4 = \frac{2AO+2BO+2CO+2DO-AB-BC-CD-AD}{2} =$

$= AO+BO+CO+DO - \frac{P_0}{2} = AC+BD-\frac{P_0}{2}$, где P_0 - периметр $ABCD$.

−

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА

КЛАСС: 10

ШИФР: М-10-2-19

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

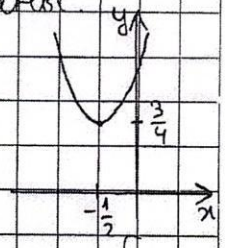
№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	2	0	0	
подписи членов жюри		Колер	Колер			

ЗАДАЧА № 10. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	11-10-2-19 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}=4$$

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+x+1$, $D=b^2-4ac=1-4=-3<0$ $\Rightarrow$ функция принимает только положительные значения и все дроби в уравнении принимают только положительные значения.

$f(x)=x^2+x+1$ – график функции представляет собой параболу ветвями вверх, найдём координаты вершины:



$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$; $f(x_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

$f(x_0)$ – это минимум функции $f(x)=x^2+x+1$

для дроби $\frac{1}{x^2+x+1}$ $\left(=\frac{1}{f(x)}\right)$ чем меньше знаменатель, тем больше значение дроби. Поэтому ~~в то~~ при минимальном значении знаменателя, равном $\frac{3}{4}$, максимальное значение дроби равно $\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$.

Поэтому максимальная сумма дробей $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}+\frac{1}{f(z)}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=4$

Но эта сумма равна 4 при $x=y=z=-\frac{1}{2}$, если взять другие числа, сумма данных дробей будет меньше 4, поэтому Сергей не мог быть прав.

Ответ: нет

7б

ЗАДАЧА № 10. 7	ЛИСТ 2 ИЗ 4 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-19 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Петя написал 10 подряд идущих натуральных чисел, поэтому каждая цифра встречается хотя бы один раз (в разряде единиц)

Петя мог оказаться прав, если он написал числа:

12345678900, 12345678901, 12345678902,

12345678903, 12345678904, 12345678905,

12345678906, 12345678907, 12345678908,

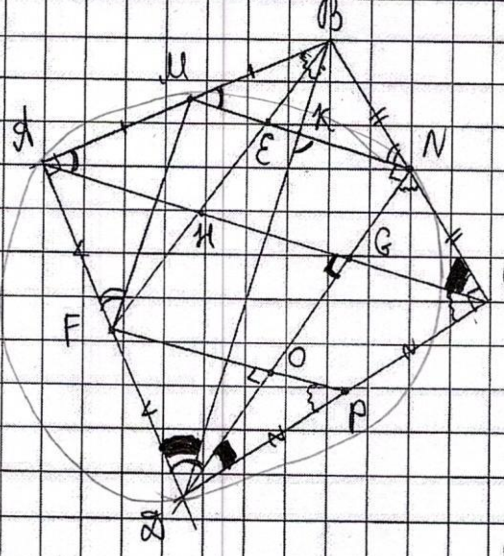
12345678909.

В этих числах каждая цифра встречается 11 раз, в девяти из чисел один раз, в одном из чисел два раза.

Ответ: да.

+

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 3 ИЗ 24 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-19 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Обозначим середины сторон AB, BC, CD и AD как M, N, P, F.

т.к. $\angle A = \angle C = 90^\circ$ в $ABCD$,

то четыр-ник $ABCD$ - вписанный

т.к. точки A, D, M, N лежат

на одной окружности по условию,

то $AMND$ - вписанный $\Rightarrow \angle A + \angle N = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle N = 90^\circ$.

т.к. M и N - середины AB и BC, то MN - средняя линия $\triangle ABC$

$\Rightarrow MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2} AC$, так же FP - средняя линия $\triangle ACD \Rightarrow$

$FP \parallel AC$ и $FP = \frac{1}{2} AC$. $\Rightarrow$ $FP = MN$, $FP \parallel MN \Rightarrow MNPF$ - пар-грамм

$\angle MND = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle FOD = 90^\circ$ (т.к. $MN \parallel AC \parallel PF$) (+)

т.к. $AMND$ - вписанный, то $\angle ADN = \angle BMN$?; $\angle BAC = \angle BMN$

почему?

(т.к. MN - ср. линия $\triangle ABC$)

$\angle BNM = \angle BCA = \angle NDC$ (т.к. $\angle MND = 90^\circ$), $\angle ACB = \angle ADB$ как

вписанные

~~$\angle ADB = \angle$~~ Пусть $\angle ADN = \alpha$, $\angle NDC = \beta$. Тогда $\angle BDN = \alpha - \beta$

$\Rightarrow \angle NKD = 90^\circ - \angle BDN = 90^\circ - \alpha + \beta \Rightarrow \angle BKN = 180^\circ - 90^\circ + \alpha - \beta =$

$= 90^\circ + \alpha - \beta \Rightarrow \angle KBN = 180^\circ - \beta - 90^\circ - \alpha + \beta = 90^\circ - \alpha$

?. почему?

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 24 ИЗ 24 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-19 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

$\angle MBN = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \angle ABD = 180^\circ - \alpha - \beta - 90^\circ + \alpha = 90^\circ - \beta$

т.к. $EN = \frac{1}{2} CH$ (в $\triangle BCH$), $FO = \frac{1}{2} AG$ (в $\triangle AGD$), $MN = \frac{1}{2} AC = FP$, то $FO = EN$

Тогда в четыр-нике $ENOF$ $EN \parallel FO$ и $EN = FO \Rightarrow ENOF$ - пар-грамм, $FE \parallel NO \Rightarrow \angle FOG + \angle EFO = 180^\circ \Rightarrow \angle EFO = 180^\circ - \angle FOG = 90^\circ$.

Тогда в четыр-нике $BCPF$ $\angle C = \angle F = 90^\circ \Rightarrow$ четыр-ник $BCPF$ вписанный, точки B, C, P, F лежат на одной окружности.

$\pm$ 2б