

ПРЕДМЕТ	М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А					КЛАСС	1	0
ШИФР	М	-	1	0	-	1	8										

### ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР №

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	0	0	
подписи членов жюри						



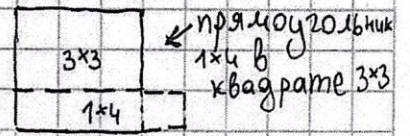
ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	M-10-18		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№10.1

Нет, не может. Докажем от противного:

Допустим, мы сможем построить квадрат стороной  $n$  ( $n$  - любое натуральное  $n > 1$ ).  
 Очевидно, что в такой квадрат могут входить только прямоугольники, чья длина  $\leq n$  (или  $2024$ , если  $n > 2024$ ), а иначе они будут выходить за пределы квадрата:  
потому что прямоугольник  $1 \times 2024$  - максимальный



Максимальная площадь фигуры, которую можно составить из прямоугольников с длинами  $1, 2, 3, \dots, i$  равна сумме площадей этих прямоугольников. Площади этих прямоугольников равны соответственно  $1, 2, 3, \dots, i$ , так как их ширина  $= 1$ . Значит, максимальная площадь фигуры  $= \frac{i \cdot (i+1)}{2}$

То есть, если Олег хочет составить квадрат со стороной  $n$  с площадью  $n^2$ , максимальная площадь фигуры, которую он может составить из допустимых прямоугольников (с  $1 \times 1$  по  $1 \times n$ ) или  $1 \times 2024$ , если  $n > 2024$  равна  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  или  $\frac{2024 \cdot (2024+1)}{2}$ :  $n \cdot \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Найдём, что больше:  $n^2 - n - n = n^2 - 2n > 0$ , так как при  $n > 1 \Rightarrow n^2 > \frac{n \cdot (n+1)}{2}$   
 при  $n > 2024$  очевидно, что  $n^2 > \frac{2024 \cdot (2024+1)}{2}$   
 Это значит, что мы не сможем построить квадрат со стороной  $n$  из выбранных прямоугольников. Но если брать больше прямоугольников (если они остались), то минимальный размер квадрата станет больше чем  $n$ .

Противоречие  $\Rightarrow$  Единственный возможный квадрат  $- 1 \times 1$  чтд. 7.5.



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

10

ШИФР

M-10-18

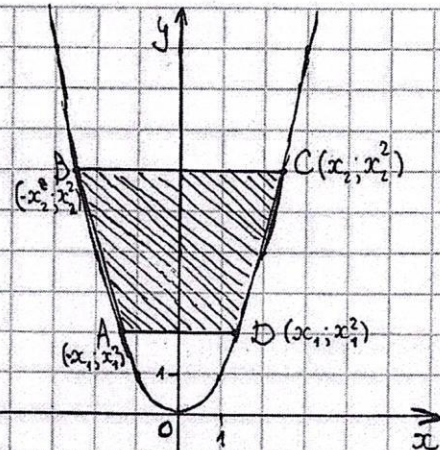
Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 2. (10.2)

Рассмотрим произвольную трапецию, вписанную в эту параболу: трапеция ABCD

Её основания равны параллельны оси абсцисс, значит точки A и D, B и C можно задать следующим образом:

$A(x_1; x_1^2)$ ,  $D(x_1; x_1^2)$ ,  $B(x_2; x_2^2)$ ,  $C(x_2; x_2^2)$



Тогда длины оснований:  $AD = 2x_1$ ,  $BC = 2x_2$

$$a) k = AD \cdot BC = 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{k}{4x_1} \Rightarrow x_2^2 = \frac{k^2}{16x_1^2}$$

Функция, задающая прямую CD:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$(x - x_1) \left( \frac{k^2}{16x_1^2} - x_1^2 \right) = (y - x_1^2) \cdot \left( \frac{k}{4x_1} - x_1 \right)$$

$$(x - x_1) \left( \frac{k}{4x_1} - x_1 \right) \left( \frac{k}{4x_1} + x_1 \right) = (y - x_1^2) \left( \frac{k}{4x_1} - x_1 \right)$$

$$(x - x_1) \left( \frac{k}{4x_1} + x_1 \right) = y - x_1^2 \quad \Downarrow x_2 \neq x_1, \text{ иначе не будет трапеции.}$$

$$\frac{k}{4x_1} \cdot x + x \cdot x_1 - \frac{k}{4} - x_1^2 = y - x_1^2$$

$$y = x \cdot \left( \frac{k}{4x_1} + x_1 \right) - \frac{k}{4}$$

Функция, задающая прямую AB:

$$(x + x_1) \left( \frac{k^2}{16x_1^2} - x_1^2 \right) = (y - x_1^2) \cdot \left( -\frac{k}{4x_1} + x_1 \right)$$

$$(x + x_1) \left( \frac{k}{4x_1} - x_1 \right) \left( \frac{k}{4x_1} + x_1 \right) = -(y - x_1^2) \left( \frac{k}{4x_1} - x_1 \right)$$

$$(x + x_1) \left( \frac{k}{4x_1} + x_1 \right) = -y + x_1^2 \quad \Downarrow x_2 \neq x_1$$

$$\frac{k}{4x_1} \cdot x + x_1 \cdot x + \frac{k}{4} + x_1^2 = -y + x_1^2$$

(продолжение на 3 стр.)














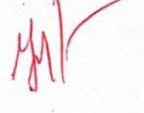


ПРЕДМЕТ	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">М</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">А</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Т</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Е</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">М</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">А</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Т</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">И</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">К</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">А</td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>	М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А				КЛАСС	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">0</td> </tr> </table>	1	0
М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А									
1	0																	
ШИФР	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">М</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">-</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">0</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">-</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">-</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">8</td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>	М	-	1	0	-	2	-	1	8								
М	-	1	0	-	2	-	1	8										

### ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри  
 Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	4	7	0	0	0	
подписи членов жюри	 	 	 	 	 	



Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

Найдём область её значений:

$$a = \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$ax^2 + ax + a = 1$$

$$ax^2 + ax + a - 1 = 0$$

Если  $a = 0$ :

$$-1 = 0 \Rightarrow a \neq 0$$

неверно

Иначе:  $D \geq 0$

$$a^2 - 4 \cdot a \cdot (a-1) \geq 0$$

$$a^2 - 4a^2 + 4a \geq 0$$

$$3a^2 - 4a \leq 0$$

$$a(3a-4) \leq 0$$

$$a \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$$

↓ по методу интервалов

$$E: \exists y \in \left(0; \frac{4}{3}\right]$$

То есть макс. значение для  $\frac{1}{x^2+x+1}$  (как и для  $\frac{1}{y^2+y+1}$ , и  $\frac{1}{z^2+z+1}$ ) —  $\frac{4}{3}$

Значит максимальное значение  $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1}$   
 $= 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ . То есть Сергей *предположил:* нашел 3 различных числа  $x, y, z$ ,  
 так что  $f(x) = \frac{4}{3}$  (продолжение на 2-ой стр)



(Продолжение)

Найдем при каких значениях  $x$   $f(x) = \frac{4}{3}$ .

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 1 \quad | \cdot 3$$

$$4x^2 + 4x + 4 - 3 = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x+1)^2 = 0$$

$$2x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

То есть  $f(x) = \frac{4}{3}$  только в случае, если  $x = -\frac{1}{2}$ , а значит Сергей не мог найти три ~~не~~ <sup>то</sup> ~~подходящих~~ различных вещественных чисел.  $\neq$

Ответ: Сергей солгал  $\neq$



Ответ: Да, могли.

Приведем пример:

числа, построенные по схеме:  $\overline{9876543210^i}$ , где

$i$  - цифра от 0 до 9:

Вот как выглядят ряд этих чисел:

- 1) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 0
- 2) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1
- 3) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 2
- 4) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 3
- 5) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 4
- 6) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 5
- 7) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 6
- 8) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 7
- 9) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 8
- 10) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 9

Не трудно посчитать, что каждая цифра используется ровно 11 раз: 10 раз в первой части чисел и 1 раз на месте последней цифры в числах.  
итд.

