Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-15		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	3	7	0	0	17
подписи членов жюри						

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-15

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача №1.

Пойдем от противного. Допустим, Олег сумел собрать квадрат из данных прямоугольников, причем длина стороны этого квадрата равна n. Тогда для сборки он не мог использовать прямоугольники длиной больше n. Заметим, что суммарная площадь всех прямоугольников длины $\leq n$ равна $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. А площадь квадрата $= n^2$. Покажем, что при $n > 1$ суммарная площадь всех пр-ков < площади кв., а значит собрать он его не мог:

$$\frac{n(n+1)}{2} < n^2 \quad (n>0)$$

$$(n+1) < 2n$$

$$1 < n \Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 10

ШИФР М-10-15

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача №2.

Т.к. основания трапеции паралл. оси абсцисс, их можно задать прямыми $y=y_1$ и $y=y_2$. (не умаляя общ. $y_2>y_1>0$)

Тогда вершины трапеции задаются коорд.

$y_1=x^2 \Leftrightarrow$ ~~точки~~ вершины нижн. основания $-(\sqrt{y_1},y_1),(-\sqrt{y_1},y_1)$

$y_2=x^2 \Leftrightarrow$ Верш. верх. основания $-(\sqrt{y_2},y_2),(-\sqrt{y_2},y_2)$

Длина этих оснований равна: $|\sqrt{y_1}-(-\sqrt{y_1})|=2\sqrt{y_1}$ и $2\sqrt{y_2}$ соотв.

$\Rightarrow k=4\sqrt{y_1y_2}$.

Выведем теперь ф-лу $ax+b=y$ для боковой стороны, не умаляя общ. при $x\geq 0$. (то есть правой бок. стороны)

$$\begin{cases} a\sqrt{y_1}+b=y_1 & (1)\\ a\sqrt{y_2}+b=y_2 & (2)\end{cases}$$

$(2)-(1) \Rightarrow a(\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1})=y_2-y_1=(\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1})(\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1})$

Т.к. $y_2>y_1 \Rightarrow \sqrt{y_2}-\sqrt{y_1}\neq 0 \Rightarrow a=\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1}$.

$(1)\Rightarrow (\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1})\sqrt{y_1}+b=y_1$

$\sqrt{y_2y_1}+y_1+b=y_1 \quad \Rightarrow b=-\sqrt{y_2y_1}$.

$\Rightarrow$ ф-ла бок стороны (правой): $(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})x-\sqrt{y_2y_1}=y$

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 10

ШИФР М-10-15

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача №2. Продолж.

Пусть у нас есть вторая трап. для которой
y_1^* и y_2^* ($y_2^* > y_1^*$; $y_2 \ne y_2^*$) задают ~~стороны~~ основания. Тогда $4\sqrt{y_2^* y_1^*} = k$.

Ф-мула бок. стороны: $(\sqrt{y_2^*}+\sqrt{y_1^*})x - \sqrt{y_2^* y_1^*} = y$

Найдем пересеч. прод. бок. сторон двух трап.:

$(\sqrt{y_2^*}+\sqrt{y_1^*})x - \sqrt{y_2^* y_1^*} = (\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1})x - \sqrt{y_2 y_1}$

$(\sqrt{y_2^*}+\sqrt{y_1^*} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_1})x = \sqrt{y_2^* y_1^*} - \sqrt{y_2 y_1}$.

Но $\sqrt{y_2^* y_1^*} = \sqrt{y_2 y_1} = \frac{k}{4}$ $\Rightarrow$ т.к. $y_2^* \ne y_2 \Rightarrow y_1^* \ne y_1$

$\Rightarrow x = 0$, $y = -\frac{k}{4}$. Тогда эти стороны пересек. в $(0; -\frac{k}{4})$. Коорд. точки не зависят от $y_2, y_1 \Rightarrow$ все правые боковые стороны трап. пересек. в ней.

Т.к. эта точка лежит на Oy и в силу симм. $y = x^2$ (а $\Rightarrow$ и самих трап.) в этой точке также пересек. и все левые стороны (продолж. сторон) $\Rightarrow$ ч.т.д.

$3+5-2-6=0$!

$3 \ne 2$
$5 \ne 6$

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-15		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 3.

Ответ: 50. +

Оценка: приведу стратегию игры за Васю, при которой он гарант. получает 50 „одноцв." пар => Оля не сможет гарантиров. получить больше 50 „разн." пар. Для этого разобьем все точки на пары по две подряд идущих. Тогда, как только Оля красит какую-то точку в паре, Вася красит вторую точку в паре в такой же цвет. Так как Вася ходит вторым, то после его хода не будет оставаться пар с 1 покр. точкой => он всегда сможет „парировать" Олю. Т.к. таких пар будет $\frac{100}{2} = 50$, Вася гарант. получит 50 одноцв. пар. 50 + ? 51?

Пример: приведу стратегию за Олю, которая позволит ей гарант. получить 50 „разн. пар". Для этого также разобьем все точки на пары подр. идущих, всего $\frac{100}{2} = 50$ пар. Так как Оля ходит первой, она не сможет всегда „парировать" Васю, поэтому разобьем ее стратегию игры на два случая

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-15

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача №3. Продолжение.

Первым ходом покрасим первую точку в любой цвет.
Потом, каждый ход, Оля будет действовать в зависимости от ходов Васи:

1) Если Вася покрасил точку в той паре, в которой еще не было покрашенных точек, Оля закрашивает вторую точку пары в другой цвет, тем самым обеспечивая +1 „разн." пару.

2) Если Вася покрасил точку в той паре, в которой уже была покрашенная точка, Оля выберет любую точку, рядом с которой есть свободное место (а такое будет всегда, т.к. Оля ходит первой) и одно занятое? и красит в противоположн. цвет => +1 „разноцв." пара

Таким образом, каждый свой ход кроме первого Оля создает 1 новую „разн." пару => всего „разн." пар ≥ 49.

Заметим теперь, что „разн." пар должно быть четн. кол-во, т.к. „разн." пара означает смену цвета, а у нас замкнутый круг => чтобы круг замкнулся,
+ нужно чтобы цвет поменялся четн. кол-во раз =>

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС 10
ШИФР	М-10-15	

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 3. Продолжение

$\Rightarrow$ цвет вернулся к первонач. Например, если „начать" круг с синей точки и сделать нечёт. кол-во смен цвета, то точка в конце будет зелёной, а т.к. круг замкнут, она должна быть синей. Т.к. всего „разн." пар точно ≥ 49, а должно быть четн. кол-во $\Rightarrow$ „разн." пар ≥ 50 +

$\Rightarrow$ ч.т.д. 7Б

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-15

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача №4.

Воспользуемся методом „скользящего окна". Добавим в наш отрезок первый элемент, а дальше будем сдвигать его границу, пока сумма на отрезке не станет больше 100000. Тогда либо сумма ≤ 100500, либо > 100500. Если ≤, то победа - мы нашли отрезок. Пусть тогда сумма > 100500 ⇒ т.к. сумма до этого была < 100000, мы добавили последним сдвигом число, ≥500. В таком случае начнем сдвигать левую границу вперед, убирая числа с конца отр., пока сумма не станет ≤ 100500. Тогда по логике опять: мы либо нашли отрезок, либо убрали число, ≥500. Тогда, т.к. чисел больших либо = 500 среди [1; 1000] ровно 500 501 таких „резкие" сдвиги произошли ровно 500 раз. не факт! их может быть Сумма чисел почему? < 500 равна $\frac{500 \cdot 499}{2} = 250 \cdot 499$, и их мы всех тоже „убрали" ⇒ однажды мы убрали чисел < 500 за один „резкий" сдвиг на $\geq \frac{250 \cdot 499}{500} = \frac{499}{2}$ (т.к. „резких"

что значит „убрали"? если убрали такое число то задача решена верно?

Страница 7 из 8

~~(100000 ... 100500~~

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-15

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача №4. Продолжение

сдвигов = 500). Но эта сумма ≥ 249, а значит однажды нам было достаточно выкинуть только числа < 500 с конца, а значит, т.к. каждое из них < 500, по дискр. непрерывн. был отрезок с суммой от 100000 до 100500 ([100000; 100500]).

Т.и.д.

7б

0 б

Ничего не понятно со знака ! на предыдущей странице

~~но~~ сдвиги могут происходить через несколько чисел

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-2-15		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри
Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	6	7	1	4	0	18
подписи членов жюри						

ЗАДАЧА № 10. 6	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-15 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Не умаляя общности, найдем максимальное значение $\frac{1}{x^2+x+1}$. Т.к. $\frac{1}{x^2+x+1} = (x^2+x+1)^{-1}$ $\Rightarrow$ чем меньше x^2+x+1, тем больше $\frac{1}{x^2+x+1}$??? если $x^2+x+1<0$?! Тогда найдем минимум x^2+x+1.

$x^2+x+1 = a \Leftrightarrow x^2+x+(1-a)=0$

$D = 1^2 - 4 + 4a \geq 0$ (т.к. Сергей утверждает, что x – существ.)

$4a \geq 3 \Rightarrow a \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \min(x^2+x+1) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \max\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \frac{4}{3}$. Тогда для любого x

$\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$, а значит $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} \leq \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$

Но, чтобы данная сумма $= 4$, каждое из слагаемых должно быть равно $\frac{4}{3}$ (т.к. если какое-то меньше $\frac{4}{3}$, сумма оставшихся $\leq \frac{8}{3} \Rightarrow$ суммарно < 4). Но у выражения $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2+x+1 = \frac{3}{4}$ не более 2 (т.к. квадратное) корней, а $x \neq y \neq z \Rightarrow$ Сергей врет.

Ответ: нет, не могут.

$\pm$

5б

ЗАДАЧА № 10. 7	ЛИСТ 1 ИЗ 1 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-15 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

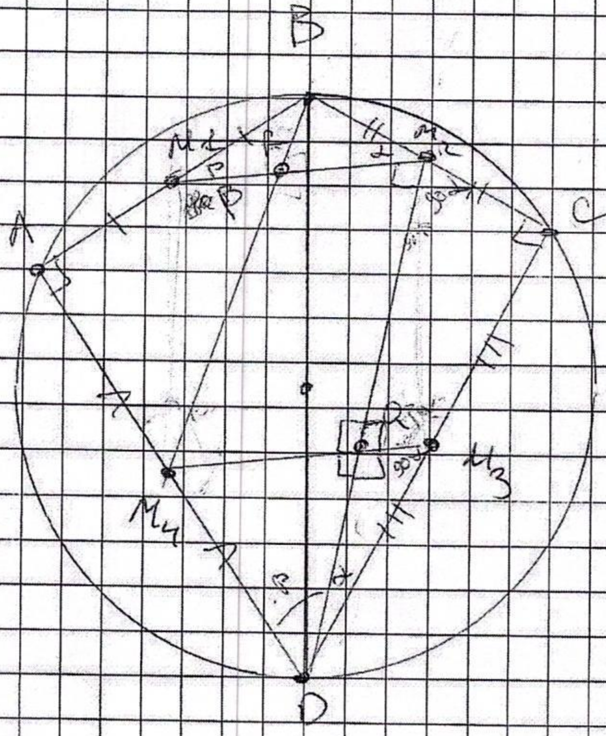
Да, Петя мог сказать правду. Пример 10 подряд идущих нат. чисел, в каждая цифра от 0 до 9 встречается 11 раз:

1) 10234567890
2) 10234567891
3) 10234567892
4) 10234567893
5) 10234567894
6) 10234567895
7) 10234567896
8) 10234567897
9) 10234567898
10) 10234567899

Нетрудно убедиться, что эти 10 чисел натуральные и подряд идущие, а также что каждая цифра встречается 11 раз.

7

ЗАДАЧА № 10. 8	ЛИСТ 3 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	M-10-2-15 ШИФР (заполняется оргкомитетом)



Решение:

1) Т.к. AM_1M_2D – впис. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle M_1AD + \angle M_1M_2D = 180°$
$\Rightarrow \angle M_1M_2D = 90°$

2) $M_1M_2 \parallel AC$ (ср. линия)
$M_3M_4 \parallel AC$ (ср. линия)

$\Rightarrow M_1M_2 \parallel M_3M_4 \Rightarrow$
$\angle M_1M_2Q = \angle M_2QM_3 = 90°$ – верно!

3) $M_1M_4 \parallel M_2M_3$ (п-мм Вариньона)
$\Rightarrow$ если $\angle M_2M_3M_4 = \beta \Rightarrow$
$\angle M_2M_1M_4 = \beta$.

4) Но $\angle M_3M_2Q = 90 - \beta \Rightarrow$

$\angle M_1M_2M_3 = 180 - \beta$.

5) M_2CM_3Q – впис. ($M_2CM_3 +$
$M_3QM_2 = 180$) $\Rightarrow$
$\angle CM_2Q + QM_3C = 180$.
$\angle CM_2Q = 90 - \beta + 90 - \angle CMM_2$

6) Пусть $\angle CDM_2 = \alpha$. Тогда:
$\angle QDM_3 = \alpha$, $\angle BM_2M_1 = \alpha$
(по ||). Тогда $\angle CM_3Q =$
$90 + \alpha$, но также $=$
$\beta - \beta + \alpha$

1 б

ЗАДАЧА № 10. 9 | ЛИСТ 4 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | М-10-2-15 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Разберем два случая:

1) $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \vdots (a+bc)(b+ac)(c+ab)$

Тогда: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = (abc)^2+(ac)^2+(ab)^2+(bc)^2 + a^2+b^2+c^2+1$

$(a+bc)(b+ac)(c+ab) = (abc)^2+(ac)^2+(ab)^2+(bc)^2 + abc(a^2+b^2+c^2+1)$

Обозначим $S = (abc)^2+(ac)^2+(ab)^2+(bc)^2$
$Q = a^2+b^2+c^2+1$

Тогда: $\dfrac{S+Q}{S+abcQ} = r$, r – натуральное $\Rightarrow >0$

Это если $a+bc \neq b+ac \neq c+ab$ иначе $S+Q$ может не делиться на $S+abcQ$

Тогда $S+Q = Sr + abcrQ$

$S(r-1) + (rabc-1)Q = 0$

Заметим, что $r-1 \geq 0$, $rabc-1 \geq 0$, $Q > 0$

$S > 0 \Rightarrow \begin{cases} r-1=0 \\ rabc-1=0 \end{cases} \Rightarrow abc = 1$, т.к. a, b, c – нат. $\Rightarrow$

$a=1$, $b=1$, $c=1$.

Тогда $a+bc = b+ac = ab+c = 2$, 2-простое.

Тогда тройка $(1, 1, 1)$ подходит.

продолж. на след. стр.

ЗАДАЧА №10. 9	ЛИСТ ~~5~~ ИЗ ~~7~~ (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-15 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

2) Пусть $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \vdots (a+bc)(b+ac)(c+ab)$

Тогда, не умаляя общности, $a+bc = b+ac$,
$(a+bc,\ b+ac,\ c+ab)$
т.к. иначе все простые различные и тогда

их произв. обязано делить $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$

Тогда: $a+bc = b+ac \Rightarrow (a-b) = (a-b)c$

$a = b$

Тогда наши простые:

$(c+1)a,\ (c+1)a,\ c+a^2$

Но, $(c+1)a$ – не простое
если $c+1 \neq 1$ и $a \neq 1$
Но c – нат. $\Rightarrow c+1 \neq 1$
$\Rightarrow a \neq 1$
Тогда все наши простые:
$c+1,\ c+1,\ c+1.$

$\Rightarrow \dfrac{(1^2+1)(1^2+1)(c^2+1)}{c+1} \in N$

Тогда либо $c = 1 \Rightarrow \frac{4}{2}$?, но тройка $(1,1,1)$ уже учтена,
либо
$$\frac{(c^2+1)}{c+1} = \frac{(c+1)^2-2c}{c+1} \in N$$
$\Rightarrow \frac{2c}{c+1} \in N$, но $2c$ – четно,

а $c+1$ – нечет.? (т.к. простое)
$\Rightarrow \frac{2(c+1)-2}{c+1} \in N \Rightarrow \frac{2}{c+1} \in N$ противоречие ?

подробн. на след. стр.

$c = 1$

Тогда наши простые:

$a+b,\ a+b,\ ab+1$

Тогда: $(a^2+1)(b^2+1) =$
$(ab)^2 + a^2+b^2+1 =$
$= (ab+1)^2 + (a-b)^2 =$
$= (ab-1)^2 + (a+b)^2$
Тогда:
1) $\dfrac{(ab-1)^2+(a+b)^2}{a+b} \in N \Rightarrow$
Т.к. $a+b$ – простое
$\dfrac{ab-1}{a+b} \in N \Rightarrow$? $a=1=b$, или
$a=2,\ b=3$ или наоборот.
$\Rightarrow$ тройка $(1,2,3)$,
простые $5, 5, 7$
2) $\dfrac{(ab+1)^2+(a-b)^2}{ab+1} \in N \Rightarrow$
$\dfrac{|a-b|}{ab+1} \in N \Rightarrow$ только ? $a=1=b \Rightarrow$
тройка $(1,1,1)$

4б

ЗАДАЧА № 10.9	ЛИСТ 6 ИЗ ~~7~~ (листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	М-10-2-15 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Тогда ответ: (1,1,1), (1,2,3).

Пояснение:

$\frac{ab-1}{a+b} = r$, r – нат.

$ar + br = ab - 1$

$r(a+b) = ab - 1$

$ar + 1 = ab - br$

$ar + 1 = b(a-r)$

$b = \frac{ar+1}{a-r} \Rightarrow ? \; r = 1$, ? ~~иначе остатки ⋰ по mod~~

Тогда $b = 2$, $a = 3$ или наоборот, либо $a = 1 = b$.

ЗАДАЧА № 10. 10 | ЛИСТ 7 ИЗ 7 (листы по каждой задаче нумеруются отдельно) | м-10-2-15 ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Пример на ~~50~~ 1012 лжецов: пусть лжец - каждый второй, начиная с 1. Тогда пусть каждый из них говорит на 1 меньше истины, => истинные ответы: почему не больше? пусть

2023, 2023, 2021, 2021, ..., 1, 1.

Тогда возьмем двух „2023" и „1" тоже.

Каждый из 2023 обязан дружить со всеми, т.к. всего 2024 чел. Тогда у „1" не остается больше друзей, а у всех кроме них на 2 меньше связей, если мы уберем „2023". Тогда ? а 2021?

Теперь у нас: 2019, 2019, 2017, 2017, ... 1, 1, 1, 1, с кем соединены?

если убрать „2023". Уберем еще 1 и 1. Тогда ~~нули~~?

Ситуация в нашем ряду аналогичная, а люд. меньше. => для них делаем то же самое. ?

Оценка: рассмотрим человека, который сказал 0 и человека, который сказал 2023. Один из них - лжец, т.к. иначе „2023" не может дружить со всеми, а должен. Теперь уберем их, а в ост. мог лгать и дружить с 2022!

ряду уменьшим числа на 1 („2023" дружит со всеми ними). Теперь числа на 2 меньше, и среди „0" и „2021" лжец.

Тогда в каждой такой паре хотя бы один лжец => 1012 лжецов

0 б