

9 класс

Второй день

- 9.6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске.
- 9.7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из неё в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча?
- 9.8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP = PQ = QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX \perp AC$ и $QY \perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP .
- 9.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T , отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T . Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)
- 9.10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, ..., поровну цифр 9.)

9 класс

Второй день

- 9.6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске.
- 9.7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из неё в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча?
- 9.8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP = PQ = QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX \perp AC$ и $QY \perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP .
- 9.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T , отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T . Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)
- 9.10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, ..., поровну цифр 9.)

10 класс

Второй день

- 10.6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что $\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} = 4$. Могут ли слова Сергея быть правдой?
- 10.7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?
- 10.8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.
- 10.9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a + bc, b + ca, c + ab$ является простым делителем числа $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.
- 10.10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?

10 класс

Второй день

- 10.6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что $\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} = 4$. Могут ли слова Сергея быть правдой?
- 10.7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?
- 10.8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.
- 10.9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a + bc, b + ca, c + ab$ является простым делителем числа $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.
- 10.10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?