ПРЕДМЕТ: математика

КЛАСС: 9

ШИФР: 9-2-28

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1 (6)	2 (7)	3 (8)	4 (9)	5 (10)	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	7	0	0	21
подписи членов жюри				АБЗ	АБЗ	

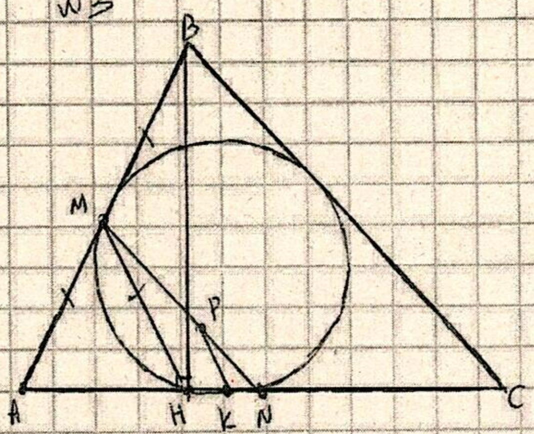
Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 09

ШИФР 9-2-28

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№3



Четырехугольник описанный, если суммы противоположных сторон равны.

Значит надо доказать, что $AM + PK = MP + AK$

MN – сред. линия $\Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$

MH – мед. в прямоуг. треуг. $\triangle ABH \Rightarrow MH = \frac{AB}{2}$

AK – отрезок касательной $\Rightarrow AK = \frac{AB+AC-BC}{2}$

$AN = \frac{AC}{2}$ (по усл.); $AM = \frac{AB}{2}$ (по усл.)

По Th. Пифагора

$BH^2 = AB^2 - AH^2$; $BH^2 = BC^2 - CH^2 = BC^2 - (AC-AH)^2$

$AB^2 - AH^2 = BC^2 - (AC-AH)^2$

$AB^2 - AH^2 = BC^2 - AC^2 + 2AC\,AH - AH^2$

$2AC\,AH = AB^2 + AC^2 - BC^2 \Rightarrow AH = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AC}$

$MH \parallel PK \Rightarrow MP = MN \cdot \frac{HK}{HN}$; $PK = MH \cdot \frac{NK}{HN}$

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	09
ШИФР	9-2-28		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

$AM + PK = MP + AK$. Начнём преобразовывать

$$\Updownarrow$$

$$\frac{AB}{2} + MH \cdot \frac{NK}{HN} = MN \cdot \frac{HK}{HN} + \frac{AB + AC - BC}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$MH \cdot NK = MN \cdot HK + HN \cdot \frac{AC - BC}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$MH \cdot (AN - AK) = MN \cdot (AK - AH) + (AN - AH) \cdot \frac{AC - BC}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{AB}{2} \cdot \left(\frac{AC}{2} - \frac{AB + AC - BC}{2}\right) = \frac{BC}{2}\left(\frac{AB + AC - BC}{2} - \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC}\right) + \left(\frac{AC}{2} - \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC}\right)\frac{AC - BC}{2} \quad \Big| \times 4$$

$$AB(BC - AB) = BC\left(AB + AC - BC - \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AC}\right) + \left(AC - \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AC}\right) \cdot (AC - BC)$$

$$AB(BC - AB) = BC\left(\frac{AB \cdot AC + AC^2 - BC \cdot AC - AB^2 - AC^2 + BC^2}{AC}\right) + \left(\frac{AC^2 - AB^2 - AC^2 + BC^2}{AC}\right)(AC - BC)$$

$$AB(BC - AB) = BC \cdot \frac{AB \cdot AC - BC \cdot AC - AB^2 + BC^2}{AC} + \frac{BC^2 - AB^2}{AC} \cdot (AC - BC) \quad \Big| \times AC$$

$$AB \cdot AC(BC - AB) = BC(AB \cdot AC - BC \cdot AC - AB^2 + BC^2) + (BC^2 - AB^2)(AC - BC)$$

$$\underline{AB \cdot AC \cdot BC} - \underline{AB \cdot AC \cdot AB} = \underline{AB \cdot AC \cdot BC} - BC \cdot BC \cdot AC - AB \cdot AB \cdot BC + BC^3 + AC \cdot BC \cdot BC - BC^3 - \underline{AB \cdot AB \cdot AC} + AB \cdot AB \cdot BC$$

$0 = 0 \Rightarrow$ исходное равенство верно $\Rightarrow AM + PK = MP + AK \Rightarrow$

$\Rightarrow AMPK$ — описанный. Что и требовалось доказать.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-2-28

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№1

Вспомним, чему равен НОК.

Если $a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, а $b = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$ (p_i – простые, α_i, β_i – целые ≥ 0)

В таком случае $[a,b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\cdot\ldots\cdot p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$. (1)

Также понятно, что $S_{m+1} = [S_m, m+1]$

$S_{m+1} = [S_m, m+1]$ и $S_{m+1} = 4S_m$.

Тогда если максимальная степень вхождения 2 в S_m равна x,

а максимальная степень вхождения 2 в $m+1$ равна y, мы можем сделать

вывод, что $y = x+2$. (это следует из (1) и $S_{m+1} = 4S_m = [S_m, m+1]$)

Найдём такое k, что $2^k \le m+1 < 2^{k+1}$. (2)

(В этом случае $k \ge 1$, т.к. $m \ge 1 \Rightarrow m+1 \ge 2$). Очевидно, что всегда +

будет существовать ровно одно подходящее k. Из (2) будет следовать,

что $y \le k$. С другой стороны $m+1 > 2^{k-1} \Rightarrow x \ge k-1$ ($k-1 \ge 0$, см. выше $k \ge 1$)

Но тогда $y - x \le 1$, а мы хотели $y - x = 2$ – противоречие.

Значит такого m нет.

Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	09
ШИФР	9-2-28		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№2

Если между числами разница 1, то будем считать, что они в одной группе.

Также группа может состоять из одного числа. Таким образом каждое число в группе

Пусть у нас есть k групп размерами $s_1, s_2, \dots, s_k$

Тогда количество 1 в тетрадке будет равно $\sum_{i=1}^{k}(s_i-1)=(s_1+\dots+s_k)-k=99-k$

По условию у нас 85 записей 1 $\Rightarrow 85=99-k \Rightarrow k=14 \Rightarrow$ у нас 14 групп

Заметим, что выполнено $s_i-1 \le d$, т.к. разница между самым большим и самым маленьким числом в группе i равна s_i-1.

Пусть $d<7 \Rightarrow s_i-1\le 6$. В таком случае, чтобы в тетрадке было 85 записей 1 нам понадобится не менее $\frac{85}{6}=14\frac{1}{6}$ групп, т.е. нам нужно хотя бы 15 групп, но у нас их 14 — противоречие.

То есть $d \ge 7$. Получим $d=7$.

Группы $s_1, s_2, \dots, s_{13}$ состоят из 7 чисел.

Для группы i это числа $1+\frac{i}{14}$; $2+\frac{i}{14}$; $3+\frac{i}{14}$; $4+\frac{i}{14}$; $5+\frac{i}{14}$; $6+\frac{i}{14}$; $7+\frac{i}{14}$

Группа s_{14} состоит из 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

Таким образом у нас задействовано $7\cdot 13+8=91+8=99$ чисел — подходит.

Числа из разных групп не имеют разницу 1, т.к. у них разные целые части $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ у нас $6\cdot 13+7=78+7=85$ единиц — верно

d, очевидно, равно $8-1=7$

Ответ: минимальное $d=7$

+ 7б

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-2-28

№4

Ответ: $m=\sqrt{2}$

0