Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	математика	КЛАСС	9
ШИФР	9-2-13		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1 (6)	2 (7)	3 (8)	4 (9)	5 (10)	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	7	0	0	0	14
подписи членов жюри						

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-2-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 9.6.

Обозначим за P_m максимальное число $k \in \mathbb{Z}$, такое, что $2^k \leq m$. Обозначим за $V_2(m)$ максимальное число $k \in \mathbb{Z}$, такое, что $m \vdots 2^k$.

Заметим теперь, что последовательность $\{S_n\}$ задается рекурсивно: $S_1 = 1$, $S_{m+1} = \text{НОК}(m+1, S_m)$. Первое выражение верно по условию. Докажем второе. Заметим, что S_m это произведение всех простых чисел в ~~степени~~ максимальной степени, встретившейся среди чисел $1, 2, \ldots, m$ и их разложений. Грубо говоря, $S_m \vdots 1$, $S_m \vdots 2$, $\ldots$, $S_m \vdots m \iff$ если $Q \vdots S_m$, то $Q \vdots 1$, $Q \vdots 2$, $Q \vdots 3$, $\ldots$, $Q \vdots m$. и при этом S_m – минимальное число, подходящее под это условие. Заметим, что $S_{m+1} \vdots m+1$, $S_{m+1} \vdots m$, $\ldots$, $S_{m+1} \vdots 2$, $S_{m+1} \vdots 1 \Rightarrow S_{m+1} \vdots S_m$ и $S_{m+1} \vdots m+1$, и при этом S_{m+1} минимально $\Rightarrow S_{m+1} = \text{НОК}(m+1, S_m)$.

Заметим теперь, что $V_2(S_m) = P_m$. Почему это так? Пускай $P_m = k$. Значит, среди чисел $1, 2, \ldots, m$ есть число 2^k и нет числа 2^{k+1}

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-2-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 9.6. Продолжение

(т.к. k максимально). Тогда $S_m \vdots 2^k$ и $S_m \not\vdots 2^{k+1}$, так как наименьшее такое $q \in \mathbb{N}$, что $V_2(q) = k+1$ и есть 2^{k+1}, а так как $m < 2^{k+1}$, то и числа от 1 до m не делятся на 2^{k+1} (ни одно из них не делится на 2^{k+1}). $\Rightarrow V_2(S_m) = P_m$.

Заметим теперь, что если $S_{m+1} = 2^2 \cdot S_m$, то $V_2(S_{m+1}) = V_2(S_m) + 2 \Leftrightarrow P_{m+1} = P_m + 2$. Что это значит? Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m$ есть число 2^{P_m}, но нет ни 2^{P_m+1}, ни 2^{P_m+2}, ни 2^{P_m+3} и так далее. Но, т.к. $P_{m+1} = P_m + 2$, то среди чисел $1, 2, \ldots, m, m+1$ есть число 2^{P_m+2}, но среди $1, 2, \ldots, m$ его нет $\Rightarrow 2^{P_m+2} = m+1$. Но тогда среди $\underbrace{\text{чисел}}_{1,2,\ldots,m+1}$ нет числа 2^{P_m+1}, т.к. среди $1, 2, \ldots, m$ его нет ($P_m < P_m+1$) ~~т.к. P_m~~, а $m+1 = 2^{P_m+2}$. Но $2^{P_m+2} > 2^{P_m+1}$, значит 2^{P_m+1} должно было встретиться среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$.

Противоречие! Значит, такого случиться не могло и S_{m+1} никогда не равно $4S_m$.

Ответ: не существует.

№ 9.7.

Будем строить ориентированный граф. Вершинами в нем будут исходные 99 чисел (обозначим их за $a_1, a_2, \dots, a_{99}$, где $a_k < a_{k+1}$ (т.к. для любых i и j $(i \neq j)$ $a_i \neq a_j$, мы можем поставить и пронумеровать числа в порядке возрастания)), а ориентированное ребро в этом графе будет вести из вершины a_i в вершину a_j в случае, если $a_j - a_i = 1$.

Заметим некоторые свойства данного графа. Т.к. для любых i и $j \in [1, 99]$ и $i \neq j$ $a_i \neq a_j$, то ни из одной вершины не выходит более 1 ребра. Докажем это. Пускай из вершины a_α ребро ведет в вершину a_β и a_γ. Тогда $a_\beta = a_\alpha + 1$ и $a_\gamma = a_\alpha + 1 \Rightarrow a_\beta = a_\gamma$. Но $\beta \neq \gamma$, т.к. это две разные вершины. По этой же причине ни в одну вершину не входит больше 1 ребра (иначе $a_\beta = a_\alpha - 1$ и $a_\gamma = a_\alpha - 1 \Rightarrow a_\beta = a_\gamma \Rightarrow$ противоречие!). Так как всего ребер 85 (по условию) и в каждую вершину ведёт не более 1 ребра, то лишь

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-2-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№9. 7. Продолжение.

$99-85=14$ вершин не имеют входящих ребер. По такой же логике ровно 14 вершин не имеют исходящих ребер. Заметим теперь, что $d=a_{99}-a_1$ (разница между наибольшим и наименьшим есть наибольшая разница). Назовем вершины, не имеющие исходящих ребер, концами, а вершины, не имеющие входящих ребер, началами. Тогда a_{99} является концом (иначе та вершина, в которую вело бы ребро была бы больше a_{99} на 1) и a_1 является началом. Если вершина не начало и не конец, то в неё входит одно ребро и одно выходит. Таким образом построенный граф разбивается на „подграфы-пути", в каждом из которых есть начало и конец (возможно совпадающие) и несколько последовательно соединенных вершин, составляющих путь между началом и концом. Тогда таких путей ровно 14 (т.к. и начал 14, и концов 14).

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-2-13

№ 9.7. Продолжение.

Докажем теперь, что если d минимально, то a_{99} и a_1 находятся в одном „подграфе-пути“. Почему это так? Пусть a_{99} является концом другого пути. Т.к. a_{99} – ~~наибольшее~~ наибольшее из чисел, то оно точно больше конца того пути, который начинается с a_1. Мы же минимизируем d, поэтому a_{99} находится в одном пути с a_1. Найдем минимальную длину максимального пути: $99 : 14 = 7\frac{1}{14}$, значит минимальная длина максимального пути равна 8 вершинам. Заметим, что этот путь начинается с a_1: если это не так, то конец этого пути будет больше конца пути, начинающегося с a_1, на ~~a_{99}~~ a_{99} – наибольший, а конец максимального пути будет больше потому что он начинается с числа, большего a_1 и имеет большую длину. Тогда, каким бы не был наш граф, в нем точно найдется путь длиной ≥ 8 вершин. Заметим теперь, что если a_1 и a_{99} находятся в разных путях, то $d > 7$.

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-2-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 9.7. Продолжение

Пускай наидлиннейший путь начинается с a_i, а заканчивается на a_j. Тогда $a_1 \le a_i$, а $a_i + 7 \le a_j$ $\Rightarrow a_1 + 7 \le a_j$. Но $a_{99} \geq a_j \Rightarrow a_1 + 7 \le a_{99}$.

Заметим, что равенство ($a_1 + 7 = a_{99}$) достигается при $a_1 = a_i$, $a_{99} = a_j$ и $a_i + 7 = a_j$, что значит, что a_1 и a_{99} в одном пути и длина этого пути = 8 вершинам (7 ребрам). Тогда остальные пути будут содержать по 7 вершин и 6 ребер. Таким образом, минимальное $d = 7$.

Пример:

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$

13 путей:

$0,1 \to 1,1 \to 2,1 \to 3,1 \to 4,1 \to 5,1 \to 6,1$

$0,2 \to 1,2 \to 2,2 \to 3,2 \to 4,2 \to 5,2 \to 6,2$

...

$0,9 \to 1,9 \to 2,9 \to 3,9 \to 4,9 \to 5,9 \to 6,9$

$0,11 \to 1,11 \to 2,11 \to \ldots \to 6,11$

... $0,14 \to 1,14 \to 2,14 \to 3,14 \to \ldots \to 6,14$

Результат: $7 - 0 = 7$

Ответ: минимальное $d = 7$.