ПРЕДМЕТ	математика
КЛАСС	11
ШИФР	11-2-09

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7	
баллы	7	7	7	0	0	21
подписи членов жюри						

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР 11-2-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 1 (11.6)

Докажем, что S_n не может отличаться от S_{n+1} в $a\cdot 2^k$ раз, где $k \geq 1$, (a вз. просто с 2.)

Если в $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ в разложении встречается 2, то $n+1 = x\cdot 2^{max}$, т.е. степень вхождения двойки для чисел $1, 2, \dots, n, n+1$ max у $n+1$. Но тогда очевидно, что среди чисел $1, 2, \dots, n$ есть $\frac{n+1}{2}$ $\Rightarrow$ S_n уже содержит в разложении 2^{max-1} $\Rightarrow$ S_n не может отличаться от S_{n+1} в $a\cdot 2^k$ раз, где $k > 1$ ($a \not| 2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{m+1} = 4\cdot S_m$ - невозможно. $4 = 2^2$

Ответ: нет.

Задача 2 (11.7)

Рассм-м прямоугольник 5×9. Его площадь $= 45 \Rightarrow$ $\Rightarrow S/2 = 22,5$. Тогда площадь пр-ка, к-й требуется вырезать должна быть равна 22 или 23 (его стороны $\in N \Rightarrow$ площадь тоже $\in N$)

22 представимо как $1\cdot 22$ или $2\cdot 11$, $23 = 1\cdot 23 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ одна сторона требуемого прямоугольника ≥ 11.

Однако наибольший отрезок внутри пр-ка 5×9 (его диагональ) $= \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$. $\sqrt{106} < 11 \Rightarrow$ требуемый пр-к вырезать не получится. Ответ: нет.

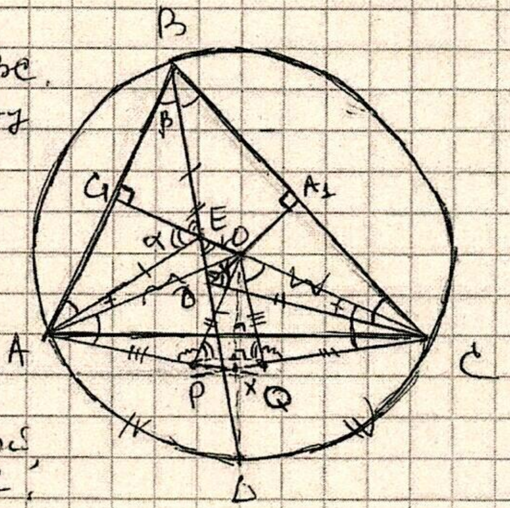
Всероссийская олимпиада школьников | Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 11

ШИФР 11-2-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 11.8.



- O – центр оп. окр $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ O – точка п-я сер. перпов $\triangle ABC$. Очевидно, что $E \in$ сер. пер-у к AB, $D \in$ сер. пер-у к BC. (основания C_1 и A_1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ O, E, C_1 лежат на одной прямой, к-я является бис/сой, высотой и медианой в $\triangle AEB$; D, O, A_1 лежат на одной прямой, к-я является бис/сой, высотой и мед. в $\triangle BDC$;

- L – точка, ~~A~~ в к-й бис/са $\angle ABC$ повторно п-т оп. окр. $\triangle ABC$.

- $\triangle BEA \sim \triangle BDC$, т.к. они р/б и углы при осн $= \beta$ ($\angle ABC = 2\beta$, BL – бис/са); углы р/б $\triangle$-в при осн. равны

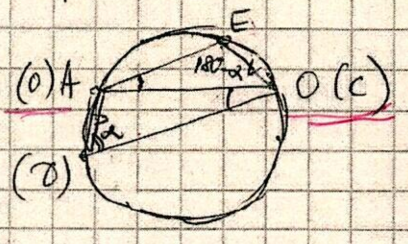
$\angle BEC_1 = \underset{\text{из р/б}}{\angle AEC_1} = \angle BDA_1 = \angle CDA_1 = 90° - \beta = \alpha$; $\underset{\text{как верг.}}{\angle LEO = \angle C_1EB = \alpha}$

$\Rightarrow \triangle EOD$ – р/б $\Rightarrow EO = OD$

- $AO = OC$ как R оп. окр. $\triangle ABC$.

- Рассм-е отдельно $\triangle AEO$ и $\triangle DOC$; $AO = OC \Rightarrow$ $\Rightarrow$ совместим их по этим сторонам

Заметим, что $\angle CDO = \alpha$, а ~~угол~~ $\angle AEO = 180° - \alpha$ как смежн. с $\angle AEC_1 = \alpha \Rightarrow$



такой 4^xуг-к вписанный.

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР 11-2-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Т.к. для каждого Δ-ка описанная окр-ть единственна мы получили, что оп. окр-ти ΔAOE и ΔCOD равны $\Rightarrow$ равны их радиусы $AP = OP = OQ = QC$

- ~~Вокруг~~ В оп. окр. ΔCOD $\angle D$ опирается на $\smile OC$ и равен $\alpha \Rightarrow$ центральный угол $OQC = 2\alpha$.

$\Delta APO = \Delta CQO$ по трём сторонам $\Rightarrow \angle APO = \angle CQO = 2\alpha$

- из пред. $\Rightarrow \angle PAO = \angle POA = \angle QOC = \angle QCO = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha = \beta$

- ~~Из~~ доп. к пункту, в к-м доказывалось совпадение оп. окр. ΔAOE и ΔCOD: т.к. корды $(O)(D)$ и OE равны, равны и дуги, к-е их стягивают $\Rightarrow$ равны углы, к-е на них опираются $\Rightarrow \angle EAO = \angle OCD = \gamma$

- Продлим AP и CQ до п-я (либо они п-ся, либо лежат на одной прямой, тогда п-е "вырождается" угол п-я $= 0°$.) Они не могут быть $\parallel$-ы, т.к. симметричны относительно AL OL (об этом далее))

$L \in$ ~~...~~ бис/~~са~~ $\angle ABC \Rightarrow L$ - серед. $\smile AC$

Очевидно, что ~~$AC \perp OL$~~ OL - сер-пер к $AC \Rightarrow C$ и A сим-ы относительно $OL \Rightarrow P$ и Q симметричны относительно OL, т.к. AP и CQ равны и расп-ся под одним углом к OA и OC (β) и $AP = CQ$ $\Rightarrow PQ \perp OL$

(Это не можно было получить, посчитав углы в $XABC$, $XPOQ$ $(AP \cap CQ = X)$)

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	11-2-09		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

(Всё там) $\triangle ABCX$

Посчитаем их. $\angle BAX = 2\beta + \gamma$, $\angle BCX = 2\beta - \gamma$,

$\angle ABC = 2\beta \Rightarrow \angle AXC = 360^\circ - 6\beta =$

$= 4\alpha + 4\beta - 6\beta = 4\alpha - 2\beta$

$\triangle XPOQ$; $\angle P = \angle Q = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle X = 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$

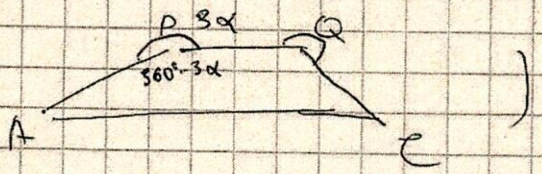
$\Rightarrow \angle POQ = 360^\circ - 360^\circ + 4\alpha - 4\alpha + 2\beta = 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle QPO = \angle PQO = 90^\circ - \beta = \alpha$

• Мы получили, что $AC \perp OL$ и $PX \perp OL$, при этом $AP = QC \Rightarrow APQC$ — р/б трапеция, а её можно вписать в окр-ть $\Rightarrow A, P, Q, C$ лежат на одной окр-ти.

Однако заметим, что $\angle APQ = \angle PQC = 3\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ при $\alpha = 60^\circ$ трапеция вырождается в прямую $\Rightarrow A, P, Q, C$ лежат на одной прямой при $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ \Rightarrow$ при $\angle ABC = 60^\circ$

(при $\alpha > 60^\circ$ трапеция «выворачивается» внутрь $\triangle ABC$, т.е.



)

ч.т.д.

7+