Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ математика КЛАСС 9

ШИФР 9-1-13

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7	35
баллы	7	~~6~~ 7	7	0	0	~~20~~ 21
подписи членов жюри						

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-1-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 9.1.

Пускай Петя двигался t_1 минут до старта движения Васи. После старта Васи Петя двигался до центра асфальтированной части t_2 минут. Тогда до центра асфальтированной части Вася с момента своего старта двигался t_2 минут (т.к. они оказались в центре одно-временно). Тогда на проезд половины асф. дорожки Вася тратит t_2 минут, а на всю асф. дорожку $\to 2t_2$; Петя же на половину тратит t_1+t_2 минут, на всю — $2t_1+2t_2$. Но тогда Петя достиг конца асф. дорожки за $2t_1+2t_2-t_1$ минут после старта Васи, что на t_1 больше чем время, потраченное Васей для достижения конца асф. дорожки с момента старта Васи. Значит, в момент, когда Петя доехал до конца асф. дорожки, Вася двигался уже t_1 минуту по песч. дорожке. Пусть Пете для проезда половины песч. дорожки потребовалось t_3 минуты. Тогда Вася прошел это же расстояние за t_1+t_3 минуты (т.к. они оказ. в центре одновременно)

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-1-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№9.1. Продолжение

Тогда на всю песчаную дорожку Петя потратил $2t_3$ минут, а Вася $2t_1+2t_3$. Тогда в сумме на всю дистанцию Петя потратил $(2t_1+2t_2)+2t_3$ минут, а Вася $2t_2+(2t_1+2t_3)$ минут, при этом: $(2t_1+2t_2)+2t_3 = 2(t_1+t_2+t_3) = (2t_1+2t_3)+2t_2$.
Значит, мальчики затратили на дорожку одинаковое кол-во времени.

+

Ответ: ничья. Они прошли дистанцию за одно и то же время.

№9.2.

Докажем, что разделить треугольник со сторонами 5, 12, 13 на множество многоугольников таких, что их периметр равен площади, нельзя. Будем действовать от противного: пускай нам удалось разрезать этот прямоугольный треугольник на некоторое кол-во многоугольников. Обозначим за l длину (суммарную) всех разрезов. Теперь заметим, что если суммирова-ть все площади полученных многоугольников, получится

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-1-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№ 9.2. Продолжение

площадь исходного треугольника, равная $\frac{12\cdot 5}{2} = 30\text{ см}^2$

А если суммировать все периметры, то получится периметр треугольника $+ 2\ell$, т.к. части сторон треугольника (каждая) входят лишь в один многоугольник, а (каждый) разрез принадлежит сразу двум многоугольникам, т.к. делит уже существующий многоугольник на два новых, и как сторона принадлежит каждому из них.

почему?

Заметим, что периметр треугольника $= 12+13+5 = 30$ см. Также, т.к. у каждого мн-ка ~~сум~~ периметр равен ~~сумме~~ площади, то и сумма периметров всех мн-ков равна сумме их периметров. Значит, $30 = 30 + 2\ell \Rightarrow \ell = 0$. Но по предположению разрез существует (разрез нулевой длины – не разрез) $\Rightarrow$ противоречие.

Ответ: нельзя.

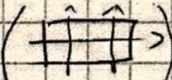
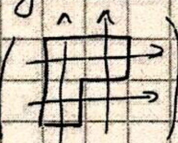
+. ~~6~~ 7

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА — КЛАСС:

ШИФР: 9-1-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№9.3.

Введём для клетчатой фигуры (связной) два показателя: h — из скольких вертикальных столбцов она состоит, и w — из скольких горизонтальных строк она состоит. Например клетка () имеет $h=1$ и $w=1$, доминошка () $h=2$, $w=1$, а уголок () имеет $h=2$ и $w=2$. Заметим теперь, что максимальное кол-во ладей, не бьющих друг друга, и установленных на данную клетчатую фигуру $= \min(h, w)$. Почему это так: заметим, что каждая ладья бьет всю свою вертикаль и всю свою горизонталь $\Rightarrow$ каждая ладья занимает одну строку и один столбец. Таким образом кол-во ладей равно минимуму из кол-ва столбцов и кол-ва строк. Докажем теперь, что больше $2n-1$ ладьи в „половинке" квадрата $2n \times 2n$ оказаться не могло. Пускай это не так. Тогда ладей $2n$ (больше нельзя по условию).

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-1-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Но $h_{max} = 2n$ и $w_{max} = 2n$, то есть больше $2n$ строк или столбцов быть не может. Значит, если кол-во ладей $= 2n$, то $h = 2n$ и $w = 2n$.

Докажем теперь, что если $w = 2n$ (не умаляя общности) то существует столбец длиной $2n$, принадлежащий (фигура №1) нашей фигуре. Заметим, что если $w = 2n$, то в любой строке исходного квадрата есть хотя бы одна клетка, принадл. нашей фигуре. Так как фигура связная, то можно составить такой путь, что он пройдет по всем клеткам (не обязательно не повторяясь). Тогда этот путь точно коснется и верхней строки и нижней => он разделит исходный квадрат на две части. Заметим, что оставшаяся (фигура №2) фигура тоже связная => одна из частей принадлежит фигуре №1. То есть: если одна фигура (№1) имеет $w = 2n$, то существ. путь по фигуре №1, такой, (и проходит по всем клеткам фигуры №1) что делит квадрат на ~~пополам~~ две части ~~(сверху вниз)~~ не (все, кроме одной) тогда фигура №2 не связна => ~~одна~~ из частей вырожденная (в ней нет клеток).

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-1-13

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№9.3. Продолжение.

То есть, такой путь всегда существует (проходит по всем клеткам фигуры №2), и он не делит исходный квадрат на две (или более) части $\Rightarrow$ либо первая, либо последняя вертикаль будут этому пути принадлежать, а значит и фигуре №1.

Хорошо. Пускай нам удалось расставить $2n$ ладей так, что они попали в фигуру №1 (не умаляя общности). Тогда для фигуры №1 $h = 2n$ и $w = 2n$. Заметим, что фигура №2 равна фигуре №1, а точнее при повороте фигуры №2 на 180 градусов вокруг центра исходного квадрата она перейдет в фигуру №1. Тогда у фигуры №2 $h = 2n$ и $w = 2n$. Заметим теперь, что если у фигуры №1 $w = 2n$, то существует столбец из $2n$ клеток, принадлежащий фигуре №1. Но тогда из этого столбца ни одна клетка не $\in$ фигуре №2 $\Rightarrow$ у фигуры №2 $h < 2n$. Противоречие!

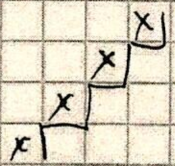
ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 09

ШИФР 9-1-13

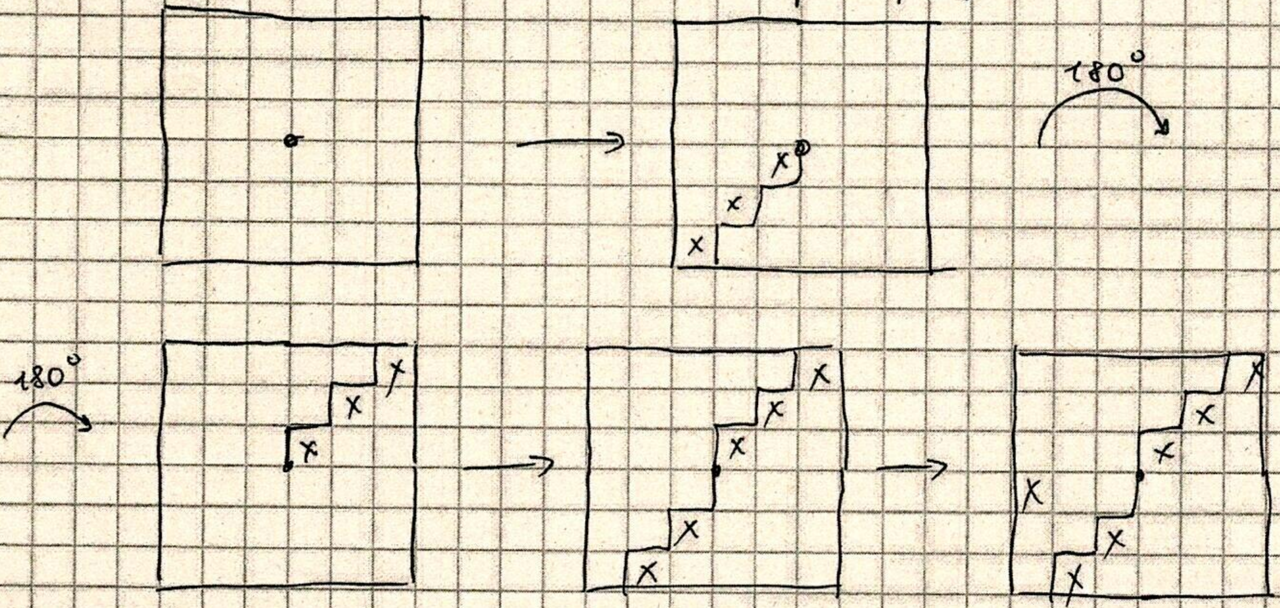
Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№9.3. Продолжение.

Приведем пример построения для $2n-1$ ладьи. Очевидно, что если $2n-1$ ладья расставлены, то $2n$-ую тоже удастся поставить в квадрат $2n \times 2n$. Разрез будем проводить так:



, то есть (x − место ладьи) лесенкой до центра фигуры (квадрата $2n \times 2n$), а дальше повернем квадрат вокруг центра на $180°$ (пропустив одну ладью рядом с центром) и разрежем лесенкой также. Пример для $n = 3$:



(последнюю $2n$-ную ладью ставим на незанятую последнюю вертикаль в место, на горизонтали где пропустили одну ладью)

Ответ: $2n-1$