

ПРЕДМЕТ	М	а	т	е	м	а	т	и	к	а	КЛАСС	1	1
ШИФР	1	1	-	1	-	0	9						

**ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ**

ТУР №

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7	
баллы	7	4	7	7	0	28
подписи членов жюри	МК <i>[Signature]</i>	<i>Кулимов</i> <i>[Signature]</i>	МК <i>Кулимов</i>	<i>[Signature]</i> <i>[Signature]</i>	<i>[Signature]</i> <i>Кулимов</i>	

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

11

ШИФР

11-1-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 1.

$a+b+c = 2023 \Rightarrow$  числа  $a$  и  $b+c$  одной чётности (в сумме даёт нечёт)

Числа  $(b+c)$  и  $(b-c+1)$  также одной чётности.

Заметим, что чёт : нечёт возможно, а нечёт : чёт - нечёт, т.к. нечёт  $\cdot 2 \Rightarrow$  чёт  $a$ ;  $(b+c)$  нечётными  $(b+c)$  - нечёт, но тогда невозможно  $(b+c) : (b-c+1) \Rightarrow$  нечётных, т.е.

Ответ: нет, нельзя. (X)

Задача 2.

I.  $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = b \Leftrightarrow x^3 - (a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x - (a_1a_2a_3+b) = 0;$

$c_1, c_2, c_3$  являются корнями этого уравнения  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3) = 0$

$x^3 - (c_1+c_2+c_3)x^2 + (c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1)x - c_1c_2c_3 = 0;$

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = c_1+c_2+c_3 \\ a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1 = c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1 \\ a_1a_2a_3+b = c_1c_2c_3 \end{cases}$$
 (по сути, из Кн. Виета для многочлена 3-й ст.)

II. Пусть  $d_1, d_2, d_3$  - корни уравнения  $(x+d_1)(x+d_2)(x+d_3) = b$ , т.е. уравнение  $x^3 + (d_1+d_2+d_3)x^2 + (d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1)x + d_1d_2d_3 - b = 0.$

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

17

ШИФР

11-1-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -(c_1 + c_2 + c_3) \\ a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1 \\ a_1 a_2 a_3 = -c_1 c_2 c_3 + b \end{cases}$$

Из двух систем получаем, что  $a_1, a_2, a_3$  — это  $-a_1, -a_2$  и  $-a_3$ . (Рейсвиком,  $-a_1 - a_2 - a_3 = -(c_1 + c_2 + c_3)$ ,  $(-a_1)(-a_2) + (-a_2)(-a_3) + (-a_3)(-a_1) = c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1$ ,  $-a_1 a_2 a_3 = -c_1 c_2 c_3 + b$ )

(Многочлен  $x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$  имеет max 3 разн. корня, а по усл.  $a_1, a_2, a_3$  — разн.  $\Rightarrow -a_1, -a_2, -a_3$  тоже  $\Rightarrow$  это ср. корней быть не может)

Ответ:  $-a_1, -a_2, -a_3$ .

Задача 3.

Предположим, что нет такого  $k$ -ка, к-й участвовал во всех олимпиадах  $\Rightarrow$  каждый школьник не участвовал хотя бы в одной олимпиаде.

Школьников будем называть  $U_1, U_2, \dots, U_n$  — их предмет, в к-м не участвовал  $U_i$  —  $AP_i$ .

Рассмотрим одну из олимпиад  $M$ .

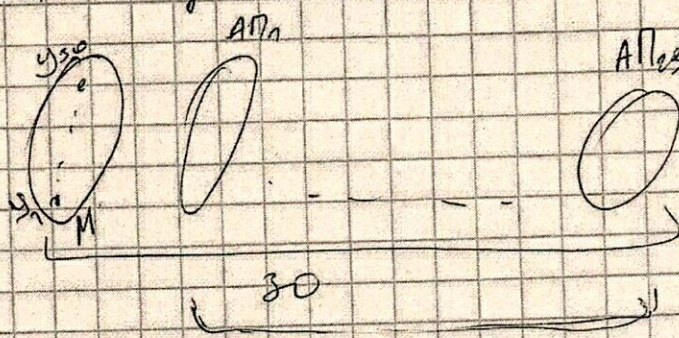
В ней участвовали  $U_1, U_2, \dots, U_m$ .

~~Каждый из них участвовал~~  
 Вид  $U_1, U_2, \dots, U_m$  можно выбрать ~~каждый~~ 29 олимпиад так, чтобы каждый из  $U_1, U_2, \dots, U_m$  не участвовал в какой-то из олимпиад.

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС
ШИФР	11-1-09	11

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

(Возможно, в каких-то из них участвовали или не участвовали несколько из этих учеников).



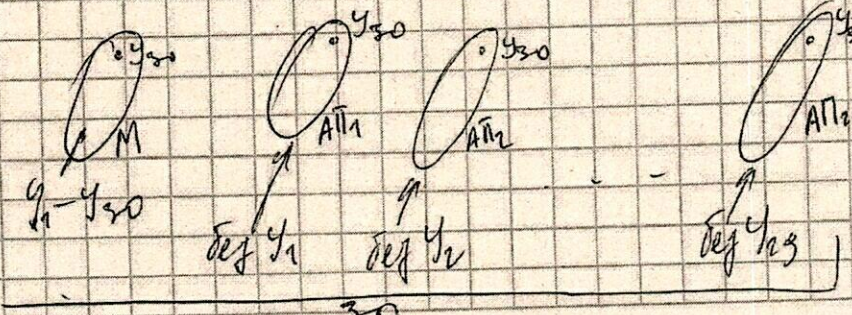
$\Rightarrow$  либо в каком-то из олимпиад не участвовали  $y_i$  и  $y_j$ ,  $1 \leq i, j \leq 29$ , либо др. вариант (рассм. ниже)

Если  $\Gamma$  олимпиада из этих 29, в к-е не узн-ны  $y_1$  и  $y_2$  (может всегда можно переименовать), то можно обобщить 28-ю множествами так, чтобы среди них находилось ли-во без  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq 29$ .  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  возьмем ~~какое-то~~ ~~предмет~~ ~~предмет~~ (в к-е участвовали  $y_1 - y_{30}$ ), эти 28 множеств и множество без  $y_{30}$ , т.к. по предположению такое есть для  $\forall y \Rightarrow$  получили набор из 30-ти олимпиад, в котором нет ученика, назавшего все предметы  $\Rightarrow$  пр-е выполнено.

(пу. либо, указательно могли быть  $AP_1, AP_2, \dots, AP_{29}$ , среди которых был предмет, к-е не тискал  $y_{30}$ , если такое возможно)

Рассм-м второй вариант: среди  $AP_1, \dots, AP_{29}$  нет такой олимпиады, в-ю не тискал бы 2 человека из  $M$  одновременно  $\Rightarrow$  состав узн-в совпадает на 29 ч-к из 30



$\Rightarrow$  во всех этих ли-х есть  $y_{30}$  иначе противореч-е

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

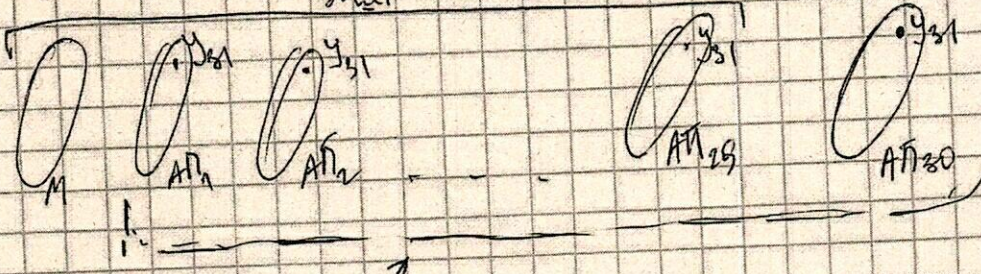
11

ШИФР

11-1-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.  
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Тогда  $\mathcal{F}$  олимпиада  $\mathcal{A}P_{30}$  вне этого набора



в этом наборе во всех олимпиадах  
должны участвовать  $U_1$  по условию

Условно: мы получили <sup>класс</sup> из 31 человека,  
который массово участвует в олимпиадах по 31  
предмету, причем каждый ученик не писал ровно  
одну олимпиаду из этих 31 (говорю, что  
различные, иначе кол-во участников  $\neq 30$ )

(Предмет  $M$  становится  $AP_{31}$ )

Рассмотрим набор из  $AP_{29}$  и  $AP_{31}$  и одного  
из  $19$  оставшихся множеств. [Этого набор  
не содержит  $AP_i$  и  $AP_j \Rightarrow$  в остальных  $AP$  есть

$U_i$  и  $U_j \Rightarrow$  в оставшемся множестве есть либо  $U_i$ , либо

$U_j$  (либо оба)] Это множество (пусть это будет  $O_{32}$ )  
содержит максимум 29  $U$ -к из "оставленного" класса,  
иначе мы получили две олимпиады с одинаковыми  
составом участников. Тогда в нем не может  
быть  $U_x$  и  $U_y$   $1 \leq x, y \leq 31 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  рассмотрим набор из всех  $AP_1 - AP_{31}$  и  $O_{32}$  без

$AP_x$  и  $AP_y$ . Получим, что в  $O_{32}$  должны быть либо  
 $U_x$ , либо  $U_y$  - противоречие.

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

11

ШИФР

11-1-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 4.

Докажем, что все операции сводятся к ~~...~~

~~...~~  $h(a; b) + l(a+b; -a)$ , где  $h, l \in \mathbb{Z}$

(т.е.  $(a; b) \rightarrow (-a; -b) \Leftrightarrow -(2a, 2b) = -2(a; b)$   
 т.е.  $-a = a - 2a, -b = b - 2b$   
 т.е.  $-b = a - (a+b), a+b = b - (-a)$ )

$(a; b) \rightarrow (-b; a+b) \Leftrightarrow -(a+b; -a)$

~~...~~ любую операцию можно представить в виде суммы тех функций

$h(a; b) + l(a+b; -a) = (2022; 2023)$

$a = 1; b = 2$  - это было изначально на доске

$h(1; 2) + l(3; -1) = (2022; 2023); h, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} h + 3l = 2022 & (1) \\ 2h - l = 2023 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h + 3l = 2022 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 1 - 3t_1, & t_1 \in \mathbb{Z} \\ l = 674 + t_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 3t_1 = 1011 + t_2 & (I) \\ 674 + t_1 = 2t_2 & (II) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2) & 2h - l = 2023 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 1011 + t_2, & t_2 \in \mathbb{Z} \\ l = 2t_2 \end{cases}$$

$t_2 = -3t_1 - 1010$   
 подставим в (II):

$674 + t_1 = -6t_1 - 2020$

$7t_1 = -2020 - 674 = -2694$ , но  $2694 \not\div 7$  - не  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Ответ: нет

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА

КЛАСС 11

ШИФР 11-1-09

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

\* Пояснение ко началу задания 4.

Операции описанные в условии задачи можно свести к суммированию некоего пар,

где суммируемо  $(a; b)$ ; два типа

операций:  $k(a; b)$ ,  $m(a+b, -a)$ ;  $k, m \in \mathbb{Z}$

(необязательно можно реализовать  $\forall m$ )

Потому реализуется  $(a; b) \rightarrow (-3; a-b)$  где  $\forall$  чисел.

По инд. если для  $n$  пред. шагов работы, то сейчас число

$$(ka + la + lb; lb - la)$$

выполним оп-ию:

$$(la - kb; ka + kb + lb)$$

$$\underbrace{la - kb}_{\text{старо}} = \underbrace{ka + la + lb}_{\text{ново}} - ka - kb - lb \stackrel{-(k+1)a - kb}{=} \dots$$

$$\underbrace{ka + kb + lb}_{\text{старо}} = \underbrace{kb - la}_{\text{ново}} + ka + la + lb \stackrel{-(k+1)(-a) + lb}{=} \dots$$

