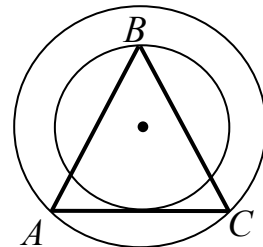


**Задания для обучающихся**  
**Время выполнения заданий –235 минут**  
**Максимальное количество баллов –42**

*Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!*

1. Семеро друзей зашли в кафе и заказали 3 маленьких стаканчика кофе, 8 средних и 10 больших. Объем маленького стаканчика в два раза меньше объема среднего, а объем большого – втрое больше объема маленького. Как друзья должны разделить между собой стаканчики с напитками, чтобы все выпили кофе поровну? Переливать кофе из стаканчика в стаканчик нельзя.

2. На рисунке изображены две окружности с общим центром и равносторонний треугольник  $ABC$ . Найдите отношение радиусов окружностей.



3. Существуют ли положительные числа  $a, b, c, d$  такие, что числа  $d$  и  $\sqrt{d}$  являются соответственно корнями уравнений  $ax + b = c$  и  $\sqrt{a}x + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ ?

4. В футбольном турнире участвовало 12 команд. До сентября они сыграли несколько игр, причём не встречались друг с другом более одного раза. Известно, что первая команда сыграла ровно в 11 играх. Есть три команды, которые сыграли по 9 игр. Есть одна команда, сыгравшая 5 игр. Четыре команды – по четыре игры. Еще две команды сыграли всего по одной игре. А вот про двенадцатую команду информация потерялась. Сколько игр сыграла 12-я команда?

5. Можно ли во все клетки таблицы  $7 \times 7$  расставить числа так, чтобы у каждого числа сумма всех его соседей (по стороне) была равна 1?

6. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Отмечена точка  $M$  – середина стороны  $BC$  и точка  $N$  – середина стороны  $CD$ . Отрезки  $AM$ ,  $AN$  и  $MN$  разделили четырехугольник на четыре треугольника, площади которых, записанные в некотором порядке, являются последовательными натуральными числами. Какую наибольшую возможную площадь может иметь треугольник  $ABD$ ?

**Материалы для членов жюри (ответы, решения, критерии оценивания)**

1. Семеро друзей зашли в кафе и заказали 3 маленьких стаканчика кофе, 8 средних и 10 больших. Объем маленького стаканчика в два раза меньше объема среднего, а объем большого – втрое больше объема маленького. Как друзья должны разделить между собой стаканчики с напитками, чтобы все выпили кофе поровну? Переливать кофе из стаканчика в стаканчик нельзя.

**Решение:** Назовем «нормой» количество кофе в маленьком стаканчике. Тогда суммарно у нас  $3+8 \times 2+10 \times 3=49$  норм. Т.к. друзей семеро, каждому причитается по 7 норм.

Делим так: 1 маленькая+2 больших – 3 человека; 2 средних + 1 большая – 4 человека.

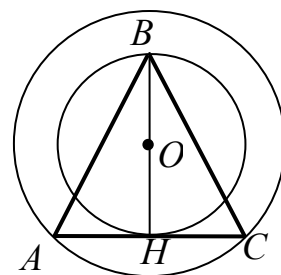
**Критерии.** Правильный пример – **7 баллов**. Никакие дополнительные рассуждения не требуются. Получен результат, что каждому требуется 7 «норм», но не показан пример (или пример приведен неверно) – **1 балл**.

Ошибочный пример, отсутствие примера – **0 баллов**.

2. На рисунке изображены две окружности с общим центром и равносторонний треугольник ABC. Найдите отношение радиусов окружностей.

**Ответ.**  $\sqrt{\frac{7}{3}}$ .

**Решение.** Обозначим центр окружности  $O$ , точку касания малой окружности и стороны  $AC$  –  $H$ . По рисунку точка  $O$  – середина высоты  $BH$ . Если сторона треугольника равна  $2a$ , то высота равна  $a\sqrt{3}$  (тогда радиус меньшей окружности  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ). Треугольник  $OHC$  – прямоугольный, его гипотенуза  $OC$  является радиусом большей окружности. По теореме Пифагора  $OC=a\frac{\sqrt{7}}{2}$ . Таким образом, отношение большего радиуса к меньшему равно  $\sqrt{\frac{7}{3}}$ .



**Критерии.** Верное решение – **7 баллов**.

Замечено, что радиус меньшей окружности – половина высоты треугольника, но дальнейших продвижений нет – **1 балл**.

МАТЕМАТИКА  
9 КЛАСС

Правильно получено соотношение между стороной треугольника и радиусом любой из окружностей – **2 балла**.

Решение верное, но содержит арифметическую ошибку, не повлиявшую на ход решения – **6 баллов**.

Получено отношение высоты к стороне равностороннего треугольника, но не сказано, какое отношение этот факт имеет к окружностям – **0 баллов** (это общеизвестный факт).

3. Существуют ли положительные числа  $a, b, c, d$  такие, что числа  $d$  и  $\sqrt{d}$  являются соответственно корнями уравнений  $ax + b = c$  и  $\sqrt{ax} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ ?

**Ответ:** Нет, не существуют.

**Решение:** Докажем, это. Предположим, что такие числа все-таки нашлись.

Из первого равенства следует  $ad = c - b$ , из второго:  $\sqrt{a}\sqrt{d} = \sqrt{ad} = \sqrt{c} - \sqrt{b}$ .

Возведем второе равенство в квадрат, приравняем  $ad$  из этих двух равенств.  $(\sqrt{c} - \sqrt{b})^2 = ad = c - b = (\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{b})$ .

Если  $c=b$ , то  $ad=0$ , чего не может быть, если  $a$  и  $d$  положительные. Поэтому  $c \neq b$ , тогда разделим обе части равенства на число  $(\sqrt{c} - \sqrt{b}) \neq 0$ , получим

$(\sqrt{c} - \sqrt{b}) = (\sqrt{c} + \sqrt{b})$ , откуда число  $b=0$ , что противоречит его положительности.

**Критерии.** Верное решение – **7 баллов**.

Без обоснования происходит деление на  $(\sqrt{c} - \sqrt{b})$  (или аналогичное при другом ходе решения), все остальное верно – **5 баллов**.

4. В футбольном турнире участвовало 12 команд. До сентября они сыграли несколько игр, причём не встречались друг с другом более одного раза. Известно, что первая команда сыграла ровно в 11 играх. Есть три команды, которые сыграли по 9 игр. Есть одна команда, сыгравшая 5 игр. Четыре команды – по четыре игры. Еще две команды сыграли всего по одной игре. А

МАТЕМАТИКА  
9 КЛАСС

вот про двенадцатую команду информация потерялась. Сколько игр сыграла 12-я команда?

**Ответ:** 5 игр.

**Решение.** Пусть первая команда K1 сыграла 11 игр – т.е. со всеми по разу. Команды K2 и K3 сыграли по 1 игре – это игры с командой K1.

Осталось 9 команд (K4-K12). Из них три команды (K4, K5, K6) сыграли по 9 игр. Одна из этих игр с K1. И 8 со всеми командами K4-K12 (кроме самой себя).

Команды K7, K8, K9, K10 сыграли по 4 игры. На данный момент очевидно, что это игры с командами K1, K4, K5, K6. (И других игр у этих команд не было)

Команда K11 сыграла 5 игр. 4 из них – это игры с K1, K4, K5, K6. И точно известно, что с командами K2, K3, K7, K8, K9, K10 она не играла. Таким образом, она сыграла пятую игру с командой K12.

Итого, команда K12 сыграла 5 игр (с K1, K4-6, K11) (и не играла с K2, K3, K7-K10).

**Критерии.** Верное решение – 7 баллов.

Полностью правильно расписано, кто с кем играл, но нет ответа на вопрос задачи (или он почему-либо неверный) – 6 баллов.

Замечено, что команда, сыгравшая 11 игр, играла со всеми (без дальнейших продвижений) – 0 баллов. Если при этом отмечено, что две команды сыграли только с ней – 1 балл.

Школьник может использовать графы для своего решения без объяснения используемых терминов.

5. Можно ли во все клетки таблицы  $7 \times 7$  расставить числа так, чтобы у каждого числа сумма всех его соседей (по стороне) была равна 1?

**Ответ:** Нет, нельзя.

**Решение.** Смотрим на левый верхний угол. В клетках «1» сумма чисел равна 1. Далее спускаемся по диагонали. В клетках «2» сумма чисел равна, таким образом, 0 (вместе с клетками «1» они образуют всех соседей второй клетки по диагонали). В


МАТЕМАТИКА  
9 КЛАСС

клетках «3» сумма должна быть 1, в клетках «4» – 0. В клетках «5» снова 1, в клетках «6» ноль. Но это противоречит тому, что у клетки в правом нижнем углу сумма соседей 1.

**Критерии.** Полностью верное решение (возможно, не такое, как предложенное) – **7 баллов**. Только верный ответ – **0 баллов**.

6. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Отмечена точка  $M$  – середина стороны  $BC$  и точка  $N$  – середина стороны  $CD$ . Отрезки  $AM$ ,  $AN$  и  $MN$  разделили четырехугольник на четыре треугольника, площади которых, записанные в некотором порядке, являются последовательными натуральными числами. Какую наибольшую возможную площадь может иметь треугольник  $ABD$ ?

**Ответ.** 6.

**Решение. Оценка.** Пусть  $n, n+1, n+2, n+3$  – площади четырех треугольников. Тогда площадь четырехугольника  $ABCD$  равна  $4n+6$ .  $MN$  – средняя линия треугольника  $BCD$ , поэтому  $S_{BCD} = 4S_{MCN}$ , но  $S_{MCN} \geq n$ , значит  $S_{BCD} \geq 4n$ . Тогда  $S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{BCD} \leq 6$ .

**Пример.** Если  $ABCD$  – это равнобедренная трапеция с основаниями  $BC=4$  и  $AD=6$  и высотой 2, то  $S_{ABD} = 6$ . Площади треугольников  $CMN$ ,  $ABM$ ,  $AND$  и  $AMN$  равны 1, 2, 3 и 4 соответственно, т.е. являются последовательными натуральными числами.

**Критерии.** Полностью верное решение – **7 баллов**.

Верное решение, но в примере не показано, почему он подходящий (не обосновано, что площади четырех указанных в условии треугольников являются последовательными натуральными числами) – **5 баллов**.

Доказано, что площадь не превосходит 6, но нет примера, когда площадь равна 6 (или он неправильный) – **4 балла**.

Получен пример, когда площадь треугольника  $ABD$  равна 6 (с обоснованием и подтверждением вычислений), но нет объяснения, почему больше 6 она быть не может – **3 балла**.

Пример правильный, но без обоснования, что он подходит под условия задачи (что площади нужных треугольников – 4 последовательных числа) – **1 балл**.