

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Задания для обучающихся

Время выполнения заданий – 235 минут

Максимальное количество баллов – 42

Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!

1. Буратино вышел из дома папы Карло и пришёл на Поле Чудес ровно в 22:00. Если бы скорость, с которой он шёл, была на 25% больше, то он пришёл бы в 21:30. В какое время он вышел из дома?

2. Трёхзначное число, все цифры которого различны, назовем *сбалансированным*, если оно равно сумме всевозможных двузначных чисел, составленных из различных цифр этого числа. Приведите пример какого-нибудь сбалансированного числа. Ответ обоснуйте.

3. На турнире каждый из участников должен был сыграть с каждым из оставшихся ровно по одной партии, но двое участников выбыли по ходу турнира, сыграв только по 4 партии. Поэтому число всех сыгранных партий оказалось равным 62. Сколько всего было участников?

4. Существуют ли положительные числа a, b, c такие, что числа d и \sqrt{d} являются соответственно корнями уравнений $ax^2 + bx - c = 0$ и $\sqrt{a}x^2 + \sqrt{b}x - \sqrt{c} = 0$?

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = \sqrt{17}$ и $AC = 4$ на стороне AC взята точка M так, что $CM = 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM.

6. В школьной викторине участвовали 100 учеников. После подведения итогов оказалось, что любые 66 из них вместе заработали не менее 50% от общего количества призовых очков. Какой наибольший процент очков мог заработать один участник викторины?

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Материалы для членов жюри (ключи, критерии оценивания)

1. Буратино вышел из дома папы Карло и пришёл на Поле Чудес ровно в 22:00. Если бы скорость, с которой он шёл, была на 25% больше, то он пришёл бы в 21:30. В какое время он вышел из дома?

Ответ: в 19:30.

Решение: Если Буратино потратил t (ч) на свой путь, то с увеличенной скоростью он потратил бы в 1,25 меньше, т.е. $\frac{4}{5}t$. Значит, он сэкономил бы $\frac{1}{5}t$, что составило бы 30 мин. Следовательно, на дорогу до Поля Чудес он потратил 2,5 часа, а вышел из дома в 19:30.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

2. Трёхзначное число, все цифры которого различны, назовем *сбалансированным*, если оно равно сумме всевозможных двузначных чисел, составленных из различных цифр этого числа. Приведите пример какого-нибудь сбалансированного числа. Ответ обоснуйте.

Решение: Например, число $132 = 13+12+32+21+31+23$ является сбалансированным (есть и другие варианты).

Критерии проверки: Любое подходящее число с проверкой – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

3. На турнире каждый участник должен был сыграть с каждым из оставшихся ровно по одной партии, но двое участников выбыли по ходу турнира, сыграв только по 4 партии. В итоге количество всех сыгранных партий оказалось равным 62. Сколько всего было участников?

Ответ: 13.

Решение: Пусть всего было n участников. Тогда, не считая двоих выбывших, между остальными участниками состоялось $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партий. Если эти двое успели сыграть между собой, то с их участием было сыграно 7 партий, а если не успели, то 8 партий. Таким образом, имеем два случая $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 8 = 62$ или $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 7 = 62$. Решая эти уравнения, находим, что

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

первое не имеет целых корней, а второе имеет один положительный целый корень $n = 13$.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**. Ход решения верный, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов**. Замечено наличие двух случаев, но второй не доведен до конца, получен правильный ответ – **4 балла**. При переборном решении учтены не все случаи, получен верный ответ – **3 балла**. Только верный ответ с обоснованием, что он подходит – **2 балла**. Решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

4. Существуют ли положительные числа a, b, c такие, что числа d и \sqrt{d} являются соответственно корнями уравнений $ax^2 + bx - c = 0$ и $\sqrt{a}x^2 + \sqrt{b}x - \sqrt{c} = 0$?

Ответ: нет.

Решение: Пусть такие числа существуют, подставим в уравнения вместо x значения d и \sqrt{d} соответственно. Тогда имеем $c = ad^2 + bd$ и $\sqrt{c} = \sqrt{a}d + \sqrt{b}\sqrt{d}$. В последнем равенстве обе части положительны, возведем их в квадрат: $c = (\sqrt{a}d + \sqrt{b}\sqrt{d})^2 = ad^2 + 2d\sqrt{abd} + bd = ad^2 + bd$. Значит $2d\sqrt{abd} = 0$, а так как a и b не равны 0, то $d = 0$. Но, тогда и число c будет равно 0, а это противоречит условию задачи.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, получено равенство $d = 0$, но этот случай не исключен – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = \sqrt{17}$ и $AC = 4$ на стороне AC взята точка M так, что $CM = 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM.

Ответ: 2.

Решение: Проведем высоту ВН на сторону AC. Пусть $CH = x$, тогда $BH = 4 - x$. По теореме Пифагора из двух треугольников имеем $BH^2 = BC^2 - CH^2 = 17 - x^2$ и $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 25 - (4 - x)^2$. Приравняв правые части обоих равенств, получим $x = 1$, а значит точки M и H совпадают. Тогда треугольники ABM и BCM – прямоугольные, центры описанных окружностей лежат на серединах гипотенуз AB и BC. Расстояние между центрами равно длине средней линии, параллельной стороне AC, т.е. равно 2.

**МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС**

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

6. В школьной викторине участвовали 100 учеников. После подведения итогов оказалось, что любые 66 из них вместе заработали не менее 50% от общего количества призовых очков. Какой наибольший процент очков мог заработать один участник викторины?

Ответ: 25%.

Решение: Допустим участник X набрал наибольший процент очков – $x\%$. Разобьем остальных участников на три группы A, B и C по 33 человека. Пусть в этих группах суммарно участники набрали соответственно a , b и c процентов очков. Тогда

$$2(100 - x) = 2(a + b + c) = (a + b) + (a + c) + (b + c) \geq 50 + 50 + 50 = 150.$$

Следовательно, $x \leq 25$.

Приведем пример, при котором максимальный процент будет равен 25.

Если бы каждый из участников, кроме X, заработал $\frac{75}{99} = \frac{25}{33}\%$ всех очков, то любые 66 из них суммарно набрали бы 50%, а сам X – 25% всех очков.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, только доказана оценка «не более 25%» – **4 балла**, только приведен подходящий пример – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.