Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	11
ШИФР	М-11-4-1		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7						
баллы	7	~~7~~ 6	–	0	0						
подписи членов жюри											

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-4-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№1. Да, такое возможно. Если Илья выписал числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20. Среди этих чисел 5, 10 и 20 делятся на 5; 4, 8, 12 и 20 делятся на 4.

Общая сумма равна 71.

Ответ: да.

+

№2. Пусть трёхчлен имеет вид $P(x)=kx^2+tx+p$, $k\neq 0$. Тогда, согласно условию,

$k(b+c)^2+t(b+c)+p=ka^2+ta+p \Rightarrow kb^2+kc^2+2kbc+tb+tc+p$

$k(a+c)^2+t(a+c)+p=kb^2+tb+p \Rightarrow ka^2+kc^2+2kac+ta+tc+p$

Вычитанием выражений получаем:

$k(b^2-a^2)+2kc(b-a)+t(b-a)=k(a^2-b^2)+t(a-b)$

$2k(b^2-a^2)+2kc(b-a)+2t(b-a)=0 \quad | : 2(b-a)$, где $b-a\neq 0$, т.к. $b\neq a$ по условию

$k(b+a)+kc+t=0$

$k(a+b+c)+t=0$

$a+b+c=-\frac{t}{k}$

Докажем, что при $t\neq 0$ можно подобрать a, b и c, соответствующие условию.

Пусть $a=0$. Тогда $b+c=-\frac{t}{k}$, причём $b\neq c\neq 0$. Отсюда $b\neq c\neq -\frac{t}{k}$ и $2b\neq 2c\neq -\frac{t}{k}$, $b\neq c\neq -\frac{t}{2k}$. Если записать число $-\frac{t}{k}$ как n, то $\begin{cases} b\neq c\neq n\neq \frac{n}{2} \\ b+c=n. \end{cases}$ Решения этой системы — любая пара чисел вида $\left(\frac{rn}{q}; n-\frac{rn}{q}\right)$, где $r<q$, $q\neq 2$, $(r, q\in N)$, например, $\frac{n}{4}$ и $\frac{3n}{4}$. Итак, возможный вариант: $a=0$, $b=-\frac{3t}{4k}$, $c=-\frac{t}{4k}$

В таком случае $P(a)=p=P\left(-\frac{3t}{4k}-\frac{t}{4k}\right)=k\left(-\frac{t}{k}\right)^2+t\left(-\frac{t}{k}\right)+p=\frac{t^2}{k}-\frac{t^2}{k}+p=p$ — верно;

$P(c)=P(a+c)$, $P(b)=P(a+b)$, $P(c)=k\frac{t^2}{16k^2}-\frac{t^2}{4k}+p=-\frac{3t^2}{16k}+p$;

$P(b)=\frac{k9t^2}{16k^2}-\frac{3t^2}{4k}+p=\frac{9t^2-12t^2}{16k}+p=-\frac{3t^2}{16k}+p=P(c)=P(a+b)=P(a+c)$ — верно.

А если $t=0$?

6

Однако в том случае, если $t=0$, этот вариант не подходит, поскольку тогда $b=c=0\neq a$.

Вернёмся к уравнению $k(a+b+c)+t=0$. Если $t\neq 0$, то $k(a+b+c)=0$, где $k\neq 0$, т.к. дан квадратный трёхчлен.

Отсюда $a+b+c=0$; $a=-(b+c)$, причём $b\neq c$.

Решением может являться любая тройка чисел вида $(n; -\frac{rn}{q}; -(n-\frac{rn}{q}))$, где $r\neq \frac{q}{2}$, $r<q$ и $q\neq 2$, например, 4, -3 и -1. $(r, q \in N)$

В таком случае $P(a)=P(-\frac{ra}{q}-\frac{(q-r)a}{q})=P(-a)$ - верно, т.к. функция $P(x)=kx^2+p$ является чётной;

$P(-\frac{ra}{q})=P(a-\frac{(q-r)a}{q})=P(\frac{ra}{q})$ - верно,

$P(-\frac{(q-r)a}{q})=P(a-\frac{ra}{q})=P(\frac{(q-r)a}{q})$ - верно

(также по чётности).

Таким образом, при любых p, t и k $(k\neq 0)$ можно подобрать различные a, b и c, при которых условие выполняется.

№4. Представим компанию в виде графа из N вершин, соответствующих N сотрудникам, где ребро между вершинами соответствует дружеской связи; известно, что $N\geq 101$ и что в любой выборке из 101 вершины кол-во рёбер між ними будет нечётным.

Представим граф из 101 вершины, общее кол-во рёбер в котором нечётно. Если существует 102-я вершина A, то её можно поменять с любой другой вершиной (добавить A и ~~добавить~~ удалить другую). При этом исчезнут все рёбра, выходящие из другой вершины, и появятся выходящие из вершины A. Общее кол-во должно остаться нечётным. Значит, степень вершины A совпадает по чётности со степенью любой вершины из ~~оставшихся~~ включённых в изначальный граф. Допустим, из изнач. графа удалили вершину K, связанную с верш. K_1, и заменили её на A. При этом если A не связана с K_1, то чётность K_1 нарушится (уменьшится, т.к.

Всероссийская олимпиада школьников

Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-4-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

пропадёт одно связанное с ней ребро и не появится другого). Но тогда невозможно [~~таким же образом удалить другую вершину графа и заменить на R с соблюдением условия, т.к. мы знаем, что~~] представить 103-ю вершину A_2, которую можно так же поменять с любой другой, т.к. чётность включённых в новый граф вершин неодинакова. Значит, N может быть больше или равно 103 только в том случае, если A связана со всеми вершинами изнач. графа, степень которых >0. Если провести операцию „выключения" и „включения обратно" с другими вершинами (т.е. подставить их на место A), то станет понятно, что в изначальном графе в таком случае все вершины, не имеющих никаких связей (далее — пустых), связаны между собой.

Итак, имеем граф, где вершины либо пустые, либо связаны со всеми другими „непустыми". Пусть „непустых" вершин M.

$M < 100$, т.к. при $M = 101$ всего пар $\frac{101 \cdot 100}{2}$ — чётное кол-во;

при $M = 100$ всего пар $\frac{100 \cdot 99}{2}$ — чётное кол-во.

Пусть $M \geq (100 - 4a)$ $(a \in N)$. В таком случае из этих вершин можно выбрать $100 - 4a$, м/у которыми будет $\frac{100-4a}{2}$ — чётное кол-во связей; если остальные вершины „пустые", и их более чем 4a, то существует выборка из 101 вершины, связанных м/у собой чётным кол-вом рёбер, что не удовлетворяет условию (100-4a связанных вершин и 4a+1 „пустая"). Значит, максимальное кол-во свободных вершин при $M = 100 - 4a$, $100 - 4a + 1$, $100 - 4a + 2$ и $100 - 4a + 3$ (все числа, целая часть которых при делении на 4 одинакова и может быть выделена) равно 4a; max. сумма связ. вершин и свободных вершин равна

$100 - 4a + 3 + 4a = 103$ вершины. Значит, максимально возможное кол-во вершин графа, удовлетворяющего условию — 103.

Ответ: 103.

0

5—

3—

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-4-2

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания						7	7	7	7	7	
баллы						7	7	0	–	–	
подписи членов жюри											

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-Н-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

78

№6. Пусть $n = 2022$, $k = 1011$. Тогда

$a_{2022} - a_{1011} \geqslant 2022^3 - 1011^3 = (2\cdot 1011)^3 - 1011^3 = (2^3-1)1011^3 = 7\cdot 1011^3$

$a_{1011} = 0$ по усл., поэтому

$a_{2022} \geqslant 7\cdot 1011^3$

Пусть $n = 1011$, $k = 2022$. Тогда

$a_{1011} - a_{2022} \geqslant 1011^3 - 2022^3 = -7\cdot 1011^3$

$a_{1011} = 0$, поэтому

$a_{2022} \leqslant 7\cdot 1011^3$

Итак, $7\cdot 1011^3 \leqslant a_{2022} \leqslant 7\cdot 1011^3$; отсюда $a_{2022} = 7\cdot 1011^3$.

Ответ: $a_{2022} = 7\cdot 1011^3$.

7

№7. Предположим, что описанная ситуация возможна. Т.к. произведение цифр не может быть отрицательным, $y-1 \geqslant 0$ и $x-1 \geqslant 0$; $y \geqslant 1$, $x \geqslant 1$. + Значит, ни число n, ни число $(n+1)$ не содержат нулей; в частности, $n \bmod 10 \neq 0$ и $n \bmod 10 \neq 9$ (т.к. тогда $(n+1) \bmod 10 = 0$) + Т.к. $n \bmod 10 \in [1, 2, .., 8]$, при увеличении на 1 его произв. цифр увеличивается (не происходит перехода через десяток; последняя цифра возрастает, остальные остаются прежними). Отсюда $x < y$. + Но тогда произв. цифр $m+1$ меньше, чем произв. цифр m, т.к. $y-1 > x-1$. +

Далее для обозначения произведения цифр используется значок $\Diamond$, потому что так удобнее.

Итак, $\Diamond m+1 < \Diamond m$; это возможно только при переходе через десяток, поэтому $m \bmod 10 = 9$, $(m+1) \bmod 10 = 0$, $\Diamond(m+1) = 0$, тогда $x-1 = 0$, $x = 1$. + Раз $\Diamond n = 1$, n состоит только из единиц, а $n+1$ имеет вид $1\ldots12$, $\Diamond(n+1) = 2$. + Отсюда $y-1 = 1 = \Diamond m$. Однако это невозможно, т.к. $m \bmod 10 = 9$, поэтому $\Diamond m$ содержит множитель 9. Противоречие.

Значит, описанная ситуация невозможна.

Ответ: нет, не может.

+ 7б

№8. Представим 100-угольник с фишками в виде множества натуральных чисел $[1, 2, \ldots, 99, 100]$, где каждому числу соответствует номер числа. Изначально номера чисел равны самим числам. Обозначим числа как n, номера как i. Разрешённая операция состоит в том, что n_i меняется с n_{i+1} при $k \geqslant |n_{i+1} - n_i|$. См. сл. лист

Задача 9 —

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 11

ШИФР М-11-4-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Также можно поменять n_1 и n_{100} (т.к. все элементы расположены в вершинах замкнутой фигуры) при $k \geq |n_{100} - n_1|$.

Расположение, которого нужно добиться, выглядит как $\left[\overset{i=1}{100}, \overset{i=2}{1}, \overset{i=3}{2}, \ldots, \overset{i=100}{99}\right]$.

Заметим, что, чтобы изменить номер элемента на Δi, k должно быть $\geq \Delta i$. ~~т.к. каждое изменение положения элемента n_i на n_{i+1} требует~~ увеличения k на 1. Допустим, мы хотим переместить элемент n с позиции n_n (изначальной) на позицию $n_{n+\Delta i}$ ($\Delta i \leq 99$, т.к. это максимальная разница среди элементов множества).

Есть два пути: либо последовательно менять n с каждым следующим по часовой стрелке числом (разница с каждым следующим будет на 1 больше, чем с предыдущим, и в итоге достигнет Δi, т.к. именно такое кол-во операций должно быть произведено), либо менять n со следующими против часовой стрелки числами (но тогда потребуется поменять его с единицей и сотней), поэтому, независимо от него, $1 \leq |\Delta i| \leq n-1$ или $n-1 \leq |\Delta i| \leq 100-n$, k окажется либо больше $|\Delta i|$, либо равным ему, причём равным только в том случае, если $n+\Delta i = 100$).

ВСТ

28?

Во множестве ~~эл~~ есть элемент, номер которого должен измениться с $i=100$ на $i=1$ (число 100). Значит, $k \geq 100-1 = 99$, минимальное значение $k = 99$.

0 б

Ответ: $k_{min} = 99$.

ВСТ: Если $\Delta i < 0$ (т.е. номер должен быть уменьшен), всё происходит по такому же принципу, но движения по/против часовой стрелки меняются местами, в неравенствах Δi меняется на $|\Delta i|$

10 –