ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-3-1		

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7						
баллы	7	7	6	x	x						20
подписи членов жюри											

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-3-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№10.1. Ответ: Да, сумма написанных на доске чисел может быть меньше 75.

Пример: 1 2 3 4 5 6 8 10 12 ~~14~~ 20

Можно выбрать 3 числа, кратные 5 (5, 10, 20) и 4 числа, кратные 4 (4, 8, 12, 20). Сумма чисел равна 71, что меньше 75, поэтому противоречий с условием не возникает.

(+)

№10.2. Рассмотрим ~~$P(x) = ax^2 + bx + c$~~ $P(x) = \cancel{r}x^2 + tx + s$. Заметим, что данный многочлен можно привести к виду $x^2 + \frac{t}{r}x + \frac{s}{r}$, поэтому, не умаляя общности, мы имеем право рассматривать $P(x)$ как приведенный квадратный трехчлен. Пусть $P(x) = x^2 + px + q$.

(1) Рассмотрим случай, когда $p = 0$. Тогда $P(x) = x^2 + q$. В таком случае мы можем подобрать любые попарно различные числа a, b и c, которые в сумме дают 0, т.е. $a + b + c = 0$. Такая тройка чисел подойдет под условие: $P(b+c) = (b+c)^2 + q = (-a)^2 + q = a^2 + q = P(a)$

$P(c+a) = (c+a)^2 + q = (-b)^2 + q = b^2 + q = P(b)$

$P(a+b) = (a+b)^2 + q = (-c)^2 + q = P(c)$.

Значит, при $p = 0$ мы можем найти попарно различные числа a, b и c, подходящие под условие (т.к. уравнение $a+b+c=0$ имеет решения)

(2) Рассмотрим случай, когда $p \neq 0$. Тогда $P(x) = x^2 + px + q$.

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 10

ШИФР М-10-3-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Тогда ~~предположим, что мы не можем найти тройку попарно различных чисел~~ a, в и ~~c подходящих под условие~~, ~~и~~ рассмотрим данные равенства

$$\begin{cases} P(a)=P(b+c) \Leftrightarrow (b+c)^2+p(b+c)+q=a^2+pa+q \\ P(b)=P(a+c) \Leftrightarrow (a+c)^2+p(a+c)+q=b^2+pb+q \\ P(c)=P(a+b) \Leftrightarrow (b+a)^2+p(a+b)+q=c^2+pc+q \end{cases}$$

$$p(b+c-a+a+c-b+a+b-c)=a^2+b^2+c^2-(a+b)^2-(b+c)^2-(a+c)^2$$

$$p(a+b+c)=a^2+b^2+c^2-a^2-2ab-b^2-b^2-2bc-c^2-a^2-2ac-c^2$$

$$p(a+b+c)=-(a+b+c)^2$$

$$(a+b+c)(p+a+b+c)=0$$

Так как числа a, в и c мы выберем сами, обусловимся, что $a+b+c\neq 0$.
Тогда $p=-(a+b+c)$. Значит, если мы подберём такие числа a, в и c, которые в сумме дают $-p$, условие будет выполняться. Проверим:
Пусть $-a-b-c=p$, тогда: $P(a)=P(b+c)=(b+c)^2+p(b+c)+q=(-p-a)^2+p(-p-a)+q$
$=(p+a)^2-p(p+a)+q=(p+a)(p+a-p)+q=a(p+a)+q=a^2+pa+q=P(a)$.
~~С точностью до перестановок имеем, что~~ Значит, при $p\neq 0$ мы можем найти ~~найти~~ попарно различные числа a, в и c, подходящие под условие (т.к. уравнение $a+b+c=-p$ имеет решения).
Таким образом мы всегда можем найти a, в и c, подходящие под условие, что

+

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

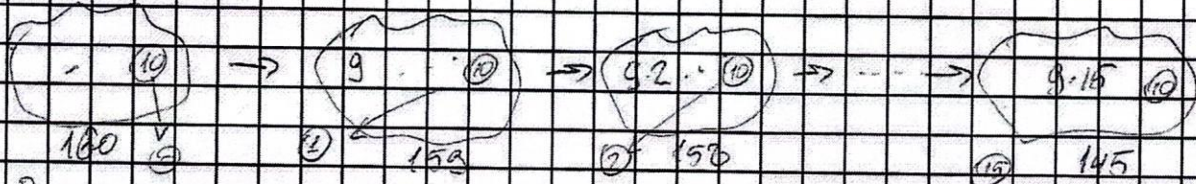
ШИФР М-10-3-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№10.3 Ответ: ~~[illegible]~~ наибольшее $n = 160$.

① Доказательство:

Докажем, что при $n = 160$ условие не нарушается:



Рассмотрим кучку из 160 конфет. В ней по условию найдётся сорт конфет такой, что таких конфет будет ровно десять. Тогда отложим одну конфету такого сорта в другую кучку. В кучке из оставшихся 159 конфет будет 9 конфет первого сорта (назовём так конфеты того же сорта, одну конфету которого мы отложили), некоторое количество других конфет, среди которых по условию есть ровно 10 конфет одного сорта. Назовём этот сорт вторым и отложим одну такую конфету в другую кучку. Таким образом, откладывая по 1 конфете разных сортов, мы придём к ситуации, когда в кучке будет находиться ровно 145 конфет, среди которых, по условию, будет ровно 10 конфет одного сорта и ровно $9 \cdot 15$ ~~[illegible]~~ $= 135$ конфет тех сортов, конфеты которых лежат в кучке отложенных конфет. Значит ~~[illegible]~~ в изначальной кучке было 16 сортов по 10 конфет, поэтому из этой кучки

пример +

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

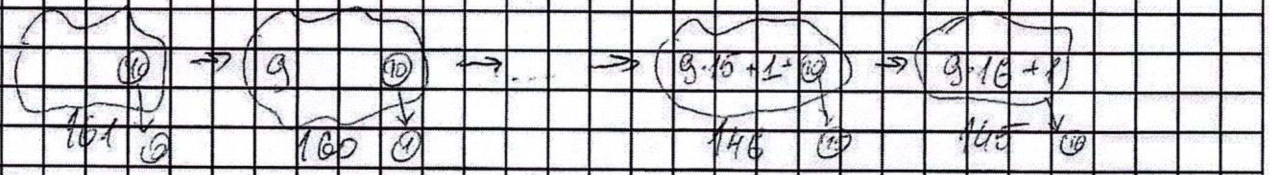
ШИФР М-10-3-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

можно взять любые 145 конфет, и среди них точно будет ровно 10 конфет одного сорта.

Теперь докажем, что при $n = 161$ условие не выполняется.

Точно так же начнём отбирать по одной конфете всех сортов, но каждый раз, когда в кучке будет ровно 10 конфет одинакового сорта.



В таком случае мы придём к ситуации, когда в кучке будет 146 конфет, среди которых $9 \cdot 15 = 135$ конфет принадлежат к сортам, конфеты которых находятся в отложенной кучке, 10 конфет одного сорта (по условию) и ещё одна конфета, отличного от всех нами встреченных сортов сорта. Стоит нам убрать одну конфету 16-го сорта — и в кучке останется 145 конфет, среди которых $9 \cdot 16 = 144$ конфет, сорта которых уже есть в отложенной кучке с конфетами, а также одна конфета нового 17-го сорта. Значит, в такой кучке просто не может оказаться 10 конфет одного сорта, что противоречит условию, значит, $n \neq 161$.

При $n \geq 161$ происходит то же самое.

Оценка 35

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	**КЛАСС**	10
ШИФР	М-10-3-1		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-3-2

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания	~~7~~	~~7~~	~~7~~	~~7~~	~~7~~	7	7	7	7	7	
баллы						4	7	0	2	X	13
подписи членов жюри											

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 10

ШИФР М-10-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№10.6 Заметим, что сумма остатков от деления каких-либо трёх натуральных чисел на одно число равна остатку от деления суммы данных трёх чисел на это число:

$$\begin{cases} a \equiv_m p \\ b \equiv_m q \\ c \equiv_m r \end{cases} \Rightarrow a+b+c \equiv_m p+q+r$$

В таком случае предположим, что сумма остатков от деления ~~этих трёх чисел~~ последовательных чисел на 2022 может равняться простому числу.
Пусть a, $a+2$ и $a+4$ — данные три последовательные числа ($a \not\vdots\, 2$)

√ p — сумма остатков от деления a, $a+2$ и $a+4$ на 2022.

В таком случае мы можем представить сумму чисел a, $a+2$ и $a+4$ в таком виде: $a+a+2+a+4 = 2022\cdot k + p$, где k — произвольный коэф-т.

Тогда $p = 3a+6-2022k = 3a+6-3\cdot 674k = 3(a+2-674k)$

Число p делится на 3, поэтому оно не может быть простым, получаем противоречие. Значит, сумма остатков от деления трёх нечетных последовательных чисел на 2022 не может быть простым числом.

Ответ: сумма остатков от деления трёх последовательных ~~чисел~~ нечетных чисел на 2022 не может быть простым числом.

А если переход через 2022 т.е. $2022(k+1)$

№10.7. Дано: $ABCD$ — впис. 4-х уг-к; $\angle A = 2\angle B$; CE — бис-са $\angle C$; $E \in AB$

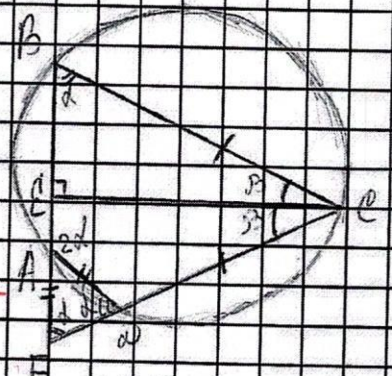
Доказать: $AD + AE = BE$.

Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 10

ШИФР М-10-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.



Доказательство:

1) Пусть $\angle B = \alpha \Rightarrow \angle A = 2\alpha$; $\angle BCE = \angle ACE = \beta$

2) По св-ву вписанного 4-угол-ка ABCD: $\angle BAD + \angle DBC = 180° \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

3) По Σ углов $\triangle BEC$: $\angle BEC = 180 - \angle B - \angle C =$ $= 180 - \alpha - \beta = 90° \Rightarrow BE \perp CE \Rightarrow CE$ – высота $\triangle BCF$, где F – точка пересечения прямых AB и CD.

4) CE – высота и биссектриса $\triangle BCF \Rightarrow \triangle BCF$ – равнобедр. (по призн. равнобедр. $\triangle$) $\Rightarrow BC = CF$; $\angle B = \angle F$ (по св-ву равнобедр. $\triangle BCF$)

5) $\angle EAD$ – внешний для $\triangle ADF \Rightarrow \angle EAD = \angle AFD + \angle ADF$ (по св-ву внешн. угла $\triangle$) $\Rightarrow 2\alpha = \alpha + \angle ADF \Rightarrow \angle ADF = \alpha = \angle AFD \Rightarrow \triangle AFD$ – равнобедр. (по призн. равнобедр. $\triangle$) $\Rightarrow AF = AD$

6) ~~BE~~ CE – высота и биссектриса, а значит и медиана равнобедр. $\triangle BCF \Rightarrow BE = FE$.

7) $BE = FE = AE + AF = AE + AD$, чтд.

№10.8.

№10.9 Ответ: наименьшее $k = 50$.

Пример: при $k = 50$ мы можем взять фишку с номером 50, поменять её местами с фишкой под номером 49, затем

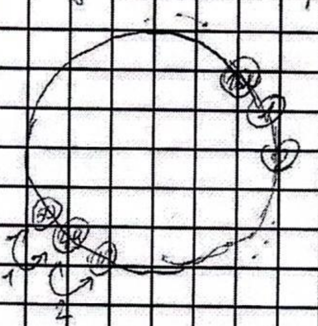
Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

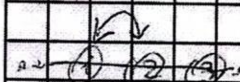
ШИФР М-10-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

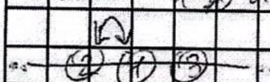
поменять местами фишки под номерами 59 и 48, затем 50 и 47, и т.д. Таким образом, все фишки сдвинутся ровно на одно место по часовой стрелке (фишки пронумерованы от 1 до 100 по часовой стрелке)



Оценка: Докажем, что хотя бы одна фишка должна поменяться местами со всеми остальными фишками. Предположим обратное и рассмотрим фишки под номерами 1, 2 и 3.



Заметим, что 1 фишка должна встать на место 2-й фишки. Выполнить это условие можно двумя способами: либо 1-я фишка обменяется местами со всеми фишками по кругу, либо поменяется местами с фишкой на 2-м месте (в данный момент на i-м месте стоит i-я фишка, ~~т.е. со 2-й фишкой~~). Так как первый способ мы не можем применить по предположению, остается только поменять местами 1-ю и 2-ю фишку. В таком случае возникает точно такая же дилемма для фишки под номером 2.



Значит, ~~перед тем как~~ менять местами 1-ю и 2-ю фишки ~~нельзя~~ бессмысленно. Это значит, что на месте 2-й фишки должна находиться не 2-я фишка. Допустим, перед тем, как менять фишки на 1-м и 2-м местах, поменяем фишки на 2-м и 3-м местах.

Всероссийская олимпиада школьников | Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	**КЛАСС**	10
ШИФР	М-10-3-2		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

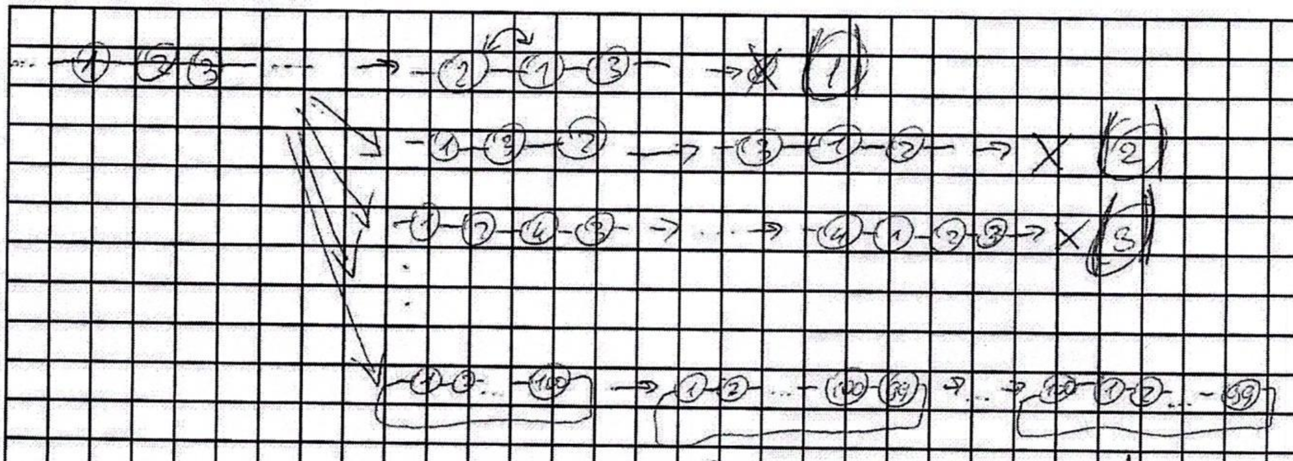


Рисунок 1

противоречие.

Тогда точно такая же дилемма возникает для фишки под номером 3 (рис 1.2). Значит, необходимо перед всеми данными действиями поменять фишки на 3-м и 4-м местах, что снова ставит для нас дилемму (для фишки 4 в этот раз, рис 1.3). Следуя такой логике, рано или поздно мы придём к выводу, что самым первым действием необходимо поменять 99-ю и 100-ю фишки. Однако в таком случае 100-я фишка, на пути к необходимому месту поменяется со всеми фишками местами, что приводит нас к противоречию. Таким образом, как минимум одна фишка должна поменяться местами со всеми остальными.

В таком случае, для достижения минимального значения k, фишка, которая пройдёт весь круг, должна иметь номер, равно-

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

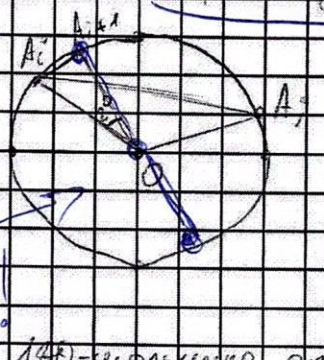
удаленный от 100 и 1, то есть фишка с таким номером должна быть способна меняться местами и с 1-й и с 100-й фишками. Соответственно, такой номер - 50, т.к. 50-я фишка может меняться с 100-й и с 1-й местами при $k=50$. Заметим, что в качестве такого номера может выступать и 51-я фишка.

При $k<50$ невозможно найти такую фишку, которая поменяется со всеми остальными местами, т.к. ~~ни одна~~ любая из фишек не сможет поменяться местами ~~с 1-й, с~~ либо с 1-й, либо с 100-й фишкой, что противоречит доказанному нами ранее факту. А значит, наименьшее возможное $k=50$.

№ 8. Ответ: $N=181$.

Пример: правильный 180-угольник, вершинам в качестве N точек выступают его вершины и центр.

Докажем, что данный пример подходит: не подходит



Заметим, что центральный угол, опирающийся на дугу между соседними вершинами, равен $2°$ (т.к. 180 вершин делят опис. окр-ть на 180 равных дуг по $2°$).

не треуг-к!

В таком случае, если пронумеровать вершины 180-угольника от 1 до 180, то центральный угол, опирающийся на

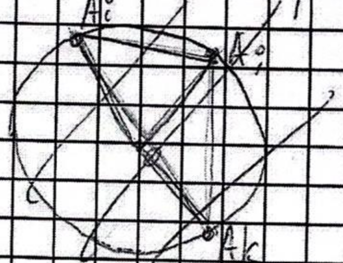
Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

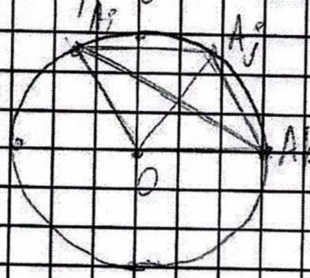
дугу $A_iA_j = 2\cdot(j-i)^\circ$, $j>i$, дуга $A_iA_j < 90^\circ$, $i,j \in \mathbb{Z}$. Заметим, что в таком случае между 1-й и 91-й вершинами центральный угол будет равен 180°, а значит, что если ~~A_i A_j~~ $i+j=91$, то ~~A_i и A_j лежат на~~ A_iA_j – диаметр опис окр-ти.

Обратим внимание на $\triangle A_iOA_j$. $\angle A_iOA_j = 2(j-i)^\circ$, $A_jO = A_iO$ как радиусы опис окр-ти $\Rightarrow \triangle A_iOA_j$ – равнобедр $\Rightarrow \angle OA_iA_j = \angle OA_jA_i =$ ~~180~~ $= \frac{180^\circ - 2(j-i)^\circ}{2} = (90-j+i)^\circ$ – это целая величина, т.к. ~~$\forall$~~ $i, j \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, все треугольники, среди вершин которых есть центр O, имеют целые градусные меры своих углов.

Теперь рассмотрим произвольный $\triangle A_iA_jA_k$ ($i, j, k \in \mathbb{Z}$, $i<j<k$). В таком случае





обратим внимание на вписанный угол $A_iA_kA_j$, опирающийся на дугу A_iA_j и равный $\frac{\angle A_iOA_j}{2}$.

$\frac{\angle A_iOA_j}{2} = \frac{2(j-i)}{2} = (j-i)^\circ$ – целое число. Аналогично $\angle A_jA_iA_k = (k-j)^\circ$ – целое число, а значит $\angle A_iA_jA_k$ тоже равен целому числу градусов.

Таким образом, ~~все треугольники, имеющие~~ среди вершин правильного 180-угольника и его центра можно взять любые три точки, образующие треугольник с целой градусной мерой всех своих углов, а значит $N = 181$ и пример подходит.