

ПРЕДМЕТ	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">М</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">А</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Т</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Е</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">М</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">А</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Т</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">И</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">К</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">К</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">А</td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>	М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	К	А										КЛАСС	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">0</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">9</td> </tr> </table>	0	9
М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	К	А															
0	9																								
ШИФР	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">М</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">-</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">9</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">-</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">-</td> <td style="width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>	М	-	9	-	3	-	1																	
М	-	9	-	3	-	1																			

### ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри  
 Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7						
баллы	7	7	0	x	x						
подписи членов жюри	<i>М</i>	<i>М</i>	<i>И.Ч.</i>	<i>В</i>	<i>М</i>						
	<i>В</i>	<i>В</i>	<i>И.И.</i>	<i>И.И.</i>	<i>В</i>						



ПРЕДМЕТ	М А Т Е М А Т И К А	КЛАСС	09
ШИФР	М - 9 - 3 - 1		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

№1. Может.

Например, числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 20 = 75 < 75$

5, 10, 20 : 5

4, 8, 12, 20 : 4

Мн. Пусть всего хотя бы 200 человек. Тогда разделим их пополам и создадим двудольный граф, где забудем временно про вершины внутри долей (но по условию внутри доли нечетное кол-во ребер).

Пусть в I доле есть вершина  $u_k$  такая, что в др. доле из нее выходит  $n_k$  кол-во ребер. Пусть она соединена с какой-то вершиной  $v_k$  в др. доле. Если их поменять местами ( $u_k$  и  $v_k$ ), то для новых двух долей должно соблюдаться условие на задание (то есть внутри доли  $n_k$  кол-во ребер).



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

09

ШИФР

М-9-3-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Кроме  $x_k$   $y_k$  соединены еще с четными кол-вом  
 ребер  $\Rightarrow x_k$  в своей доле должна иметь сое-  
 единения с четными кол-вом ребер (т.к. после  
 замены четности ребер в доле сохр.) обозна-  
 чим это так:  $y_k \rightarrow \text{чет}$  /  $x_k \rightarrow \text{чет}$   
 Пусть  $y_k \in \mathbb{N}$   $\Rightarrow$  по аналог. рассужд.  
 $x_k \rightarrow \text{чет}$ . Аналогично для вершины  $y_n$   
 $y_n$ , где  $y_n \rightarrow \text{чет}$ ,  $\Rightarrow$  если  $y_n$  и  $x_n$  соединены  
 ребром ( $x_n$  и  $y_n$  др. доли), то  $x_n \rightarrow \text{чет}$ , пусть  
 $y_n \in \mathbb{N}$   $\Rightarrow x_n \rightarrow \text{чет}$ . Это работает для всех  
 вершин, с которыми соединены  $y_k$  и для всех  
 вершин из доли I, которые соединены с нек.  
 кол-вом вершин в др. доле.



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

09

ШИФР

М-9-3-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Доказ-ть: центра окружности  
этой около  $\triangle EFC$  лежит  
на  $BD$ .

Доказ-во:  $\angle ECD = 90^\circ$ ,  
так как это угол  
между бис. внутреннему  
и внешнему угла (по сути  
это сами углы в сумме  
дают  $180$ , т.к. они смежные, а их половинки  $90$ )

№1. Не может. Пусть  $5, 10, 15 : 5$   
 $4, 8, 12, 16 : 4$  (это наименьшие натуральные  
кратные

№2. Рассмотрим остатки  $N$  при делении на 3:

	$N \equiv 0 \pmod{3}$	$N \equiv 1 \pmod{3}$	$N \equiv 2 \pmod{3}$	
$1 + N_5$	1	2	0	$N_5$ - сумма всех цифр в числе $N$
$2 + N_5$	2	0	1	
$3 + N_5$	0	1	2	
$4 + N_5$	1	2	0	Заметим, что в лю- бом случае 3 числа делятся на 3 $\Rightarrow$ так простота $x$ может быть
$5 + N_5$	2	0	1	
$6 + N_5$	0	1	2	
$7 + N_5$	1	2	0	
$8 + N_5$	2	0	1	
$9 + N_5$	0	1	2	



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

09

ШИФР

М-9-3-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

6. Магический квадрат  $N=3$

13, 23, 43, 53, 73, 83 - простые числа.

НЗ. Пусть  $P(x) = kx^2 + ux + z$

$$P(a) - P(b) = a^2k + ua + z - b^2k - ub - z =$$

$$= k(a-b)(a+b) + u(a-b) = (a-b)(ka + kb + u) = e^2.$$

Если умножим квадрат маг. числа на  $ka$  маг. числа получится кв. маг. числа  $\Rightarrow$

др. числа можем получить умножением

$a$  и  $b$  на  $n^2$ .  $a^2 \cdot n^4 \cdot k$   $b^2 \cdot n^4 \cdot k$

$$P(an^2) - P(bn^2) = a^2n^2k + uan^2 + z - b^2n^2k - ubn^2 - z =$$

$$= n^2(a^2k - b^2k + ua - ub) = n^2(a-b)(ka + kb + u) = e^2 \cdot n^2 =$$

$= (en)^2$ .  $\Rightarrow$  так квадратов маг. чисел бесконечно много, то пар чисел  $(c, d)$  бесконечно много, где  $c = an^2$ ,  $d = bn^2$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .



ПРЕДМЕТ	М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А	КЛАСС	0	9
ШИФР	М	-	9	-	3	-	2						

**ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ**

ТУР №

2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания						7	7	7	7	7	
баллы						7	2	7	7	X	
подписи членов жюри						М.А. М.А.	И.У.	И.У.	И.У.	И.У.	



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

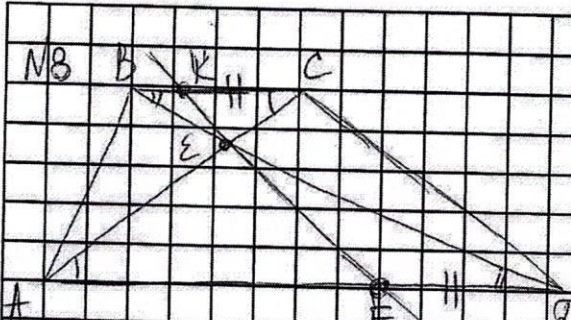
КЛАСС

09

ШИФР

М-9-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.



Дано:  $BD=AD$ ,  $EF \parallel CD$

Док-то:  $BE=DF$

Док-во: отметим пересечение ~~EF~~ в BC и

$EF$  за  $K$ . Так как  $BC \parallel AD$  ( $ABCD$ -трапеция) и  $EF \parallel CD$  (по укл.)  $\Rightarrow KFC$ -паралелограмм  $\Rightarrow FD=KC$ .  $\triangle AEF \sim \triangle CEK$  (по двум углам, что очевидно из 1))  $\Rightarrow \frac{KC}{AF} = \frac{KE}{EF}$ . т.к.  $KC=FD$ , то

$\frac{FD}{AF} = \frac{KC}{AF} = \frac{KE}{EF}$ .  $\triangle BKE \sim \triangle DEF$  (по двум углам по тем же соображениям)  $\Rightarrow \frac{KE}{EF} = \frac{BE}{ED}$ . Из 1-го

(1)  $\Rightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{KE}{EF} = \frac{KC}{AF} = \frac{FD}{AF} \Rightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{FD}{AF} \Rightarrow$  т.к.  $BD=AD$ ,

то если  $\frac{BE}{ED} = \frac{FD}{AF} \Rightarrow BE=FD, AF=ED$ . Ч.т.д.  $\checkmark$

№6  $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ ,  $1 \leq n \leq 2022$ ,  $1 \leq k \leq 2022$

$a_{1011} = 0$  Пусть  $k=1011, n=2022 \Rightarrow$

$$a_{2022} \geq 2022^3 - 1011^3 = 1011^3(2^3 - 1) = 1011^3 \cdot 7 \Rightarrow$$

$$a_{2022} \geq 1011^3 \cdot 7.$$

Итак пусть  $k=2022, n=1011 \Rightarrow$



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

09

ШИФР

М-9-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

$-a_{2022} \geq 10^{11^3} - 2022^3 = 10^{11^3}(1 - 2^3) = -7 \cdot 10^{11^3}$   
 $-a_{2022} \geq -7 \cdot 10^{11^3} \Rightarrow$   
 $a_{2022} \leq 7 \cdot 10^{11^3} \Rightarrow 7 \cdot 10^{11^3} \leq a_{2022} \leq 7 \cdot 10^{11^3} \Rightarrow$   
 $a_{2022} = 7 \cdot 10^{11^3}$

Ответ:  $a_{2022} = 7 \cdot 10^{11^3}$ .

№9. Докажем, что  $N \leq 360$ . Для начала очевидно, что никакие 3 точки не лежат на одной прямой (иначе берем их, получаем углы  $360^\circ$  и  $0^\circ$ ,  $0 \neq 360$ )  $\Rightarrow$  возьмем какую-то точку  $A$ . Минимальное натуральное число  $1 \Rightarrow$  мин  $1^\circ \Rightarrow$  сколько точек вдоль  $360^\circ$  точек (если их  $360$ , то либо 3 точки лежат на одной прямой, но все углы разные мерки нет, либо произвольные мерки не могут, т.к. всего  $360^\circ$   $\Rightarrow$  угол ~~между~~  $\angle BAC < 1^\circ$ , т.к. точек  $\leq 360$  вокруг  $A$ ) также это контрпример следует из принципа Дирихле. Таким образом,  $N \leq 360$ . Точек конечное число. Пусть они как-то расположены на плоскости. Рассмотрим точку  $A$ . Будем через нее проводить



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

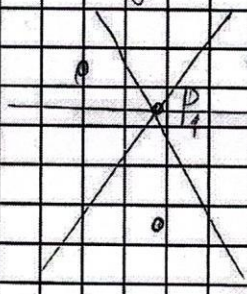
09

ШИФР

Н-9-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

пришлось, пока не случится такое, что при  
какой-то прямой  $l$  с одной стороны от  
 $l$  нет точек. Чтобы такого не произошло,  
вокруг точки  $P_1$  должно быть хотя бы три  
макс, чтобы  $P_1$  лежала в  $\Delta$ , опр. этими точками.  
точки (они никак не  $3$  и  $l$  не лежит  
на одной прямой  $\Rightarrow$  для любой  $l$  хотя  
бы одна из точек будет  $\neq 1$  точка).



Тогда берем следующую точ-  
ку  $P_2$ . Аналогично для нее  $\Rightarrow$   
вокруг  $P_2$  хотя бы 3 точки так,  
чтобы они образовывали  $\Delta$  и

$P_2$  лежала внутри (иначе проводим прямую  
вне  $\Delta$ )  $P_2$ . Аналогично продолжим  
для  $P_3$ .

для  $P_k$ , где  $1 \leq k \leq 300$  (т.к.  $N \leq 300$ ). Т.к. точек  
конечное число, то очевидно, что  $\exists P_a$ ,  
для которой рядом не будет трех таких  
точек, чтобы  $P_a$  лежала внутри образованного  
ими  $\Delta$  т.к. если  $\forall P_k$   $\exists$   $l$   $P_k$  лежат в какой-то  
 $\Delta$  из трех соседей  $\Rightarrow$  много точек близко между



ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

КЛАСС

09

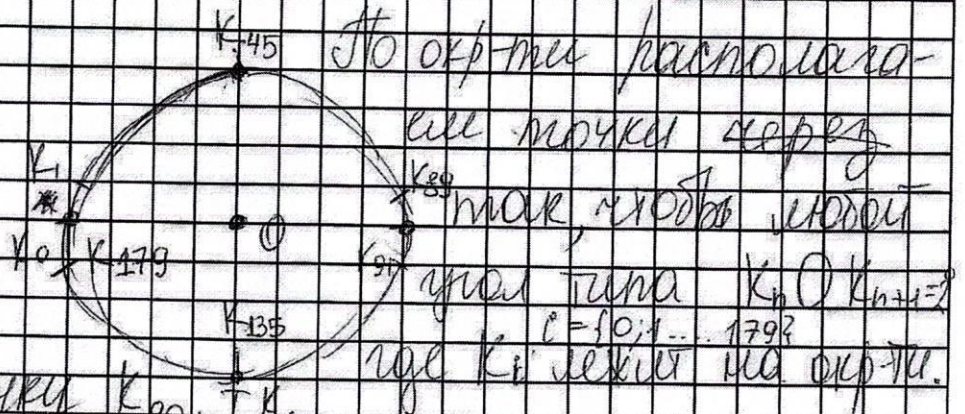
ШИФР

М-9-3-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

много, либо это не плоскость, а шар)  $\Rightarrow$   
 берем эту точку  $P_0$  и проводим для нее  
 $\alpha$ , чтобы по одну сторону от  $\alpha$  не  
 было точек вообще. Все углы типа  $\angle X P_0 Y$ ,  
 $P_0 \dots$ , где  $X$  и  $Y$  - точки задан-  
 $\dots$ , но мы имеем  
 натуральную градусную меру (по углу)  $\Rightarrow$   
 т.к. в плоскости от прямой всего  $180^\circ \Rightarrow$   
 так 179 точек, не считая  $P_0$  (никакие 3 не ле-  
 жат на одной прямой и все углы  $X P_0 Y$  на-  
 туральны).  $\Rightarrow N \leq 180$ .

Пример:



вырезаем точку  $K_{90}$ ,  $\perp K$ .  
 также точки  $K_0, O$  и  $K_{90}$  лежат на одной пря-  
 мой. Всего точек  $180 (O, K_0, K_{90}, K_{91}, K_{179})$   
 Для всех  $n$  типа  $K_n O K_{n+1} \angle K_n O K_{n+1} = 2^\circ, K_n O =$



ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	09
ШИФР	M-9-3-2		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете. Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

$\angle K_{n+1} O$  (т.к.  $OK_n = OK_{n+1}$ )  $\Rightarrow \angle OK_n K_{n+1} = \angle OK_{n+1} K_n$  и  $\angle OK_n K_{n+1} = \angle OK_{n+1} K_n$  (по 89°)

Будут ли углы  $\angle K_n K_{n+1} K_{n+2}$  и  $\angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$  равны? Если  $\times$ ,  $\angle K_n K_{n+1} K_{n+2} = \angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$ , то

$2 \angle K_n K_{n+1} K_{n+2} = 2 \angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$ ,  $2 \angle K_n K_{n+1} K_{n+2} = 2 \angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$

$2 \angle K_n K_{n+1} K_{n+2} = 2 \angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$ .  $\angle K_n K_{n+1} K_{n+2} = 2 \cdot |b-a|$ . Аналог.

для  $\angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$ ,  $\angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3} = 2 \cdot |c-b|$ .  $\Rightarrow \angle K_n K_{n+1} K_{n+2} = \angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$

$\angle K_n K_{n+1} K_{n+2}$  и  $\angle K_{n+1} K_{n+2} K_{n+3}$  будут ли равны?

Для  $\angle K_n K_{n+1} K_{n+2}$   $\angle K_n K_{n+1} K_{n+2} = 2|e-d| \in \mathbb{N}$

они будут р/о, т.к.  $K_n O = K_{n+1} O \Rightarrow \angle K_n O = \angle K_{n+1} O =$

$= \frac{180 - 2|e-d|}{2} = 90 - |e-d| \Rightarrow$  для всех  $\angle$  углы будут

$\in \mathbb{N}$ .

№7. У Васи обязательно будет в-16 сделать это, если Петя раскрасит в свою очередь доску так.

