Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА
КЛАСС	10
ШИФР	М-10-2-1

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 1

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7						
баллы	7	0	7	7	0						21
подписи членов жюри											

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-2-1		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 10.1.

Ответ: да, может.

Пример набора: $\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20}_{10 \text{ различных } \mathbb{N} \text{ чисел}}$.

3 числа $\vdots 5$: 5, 10, 20

4 числа $\vdots 4$: 4, 8, 12, 20.

Сумма чисел: $1+2+3+4+5+6+8+10+12+20=71$

$71 < 75$

(+)

Задача 10.3.

Назовём сорта, кол-во конфет которых ровно 10, особыми.

Очевидно, что есть хотя бы один особый сорт конфет, иначе для группы из всех (n) конфет не соблюдалось бы условие.

Заметим, что для n конфет верно следующее суждение: количество особых сортов $k \geqslant (n-144)$.
Докажем это от противного.
Допустим, что кол-во особых сортов $< (n-144)$.
Выберем такую группу конфет, что в неё не будет входить ровно по 1 конфете из каждого особого сорта. Проще говоря, из всего набора конфет "выкинем" по одной конфете каждого особого сорта – рассмотрим получившуюся группу.

~~...~~ Всего конфет было n, "выкинули" $k < (n-144)$ ~~(...)~~ $\Rightarrow$ осталось $n-k > n-n+144$

$n-k > 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ осталось min 145 конфет, но эта группа конфет не удовлетворяет условию, т.к. в ней ~~...~~ содержатся

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-2-1		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Только все конфеты сортов с кол-вом $\neq 10$ и по 9 конфет особых сортов $\Rightarrow$ получим противоречие условию $\Rightarrow$ предположение, что кол-во особых сортов $k \geq (n-144)$ — верно.

Тогда суммарно конфет $\geq 10k$ (10k — только кол-во конфет особых сортов, про ост. неизвестно)

+ $n \geq 10k \geq 10(n-144)$

$n \geq 10n - 1440$

$9n \leq 1440$

$n \leq 160$

Наибольшее возможное значение n — 160.

~~Пример~~ ~~16~~ (В данном наборе обязательно

16 ~~наборов~~ сортов конфет по 10 шт; убирая так по 15 конфет, невозможно ~~...~~ "разрушить" ~~...~~ все особые сорта $\Rightarrow$ всегда будет соблюдаться условие, т.е в подгруппе конфет из ≥ 145 шт. всегда хотя бы один сорт будет в "полном составе" $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ условие соблюдается.

Ответ: 160 конфет.

+

Задача 10.4

Заметим, что сумма котэф-в $= 0 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1$ — корень многочлена и $P(x) \vdots (x-1)$

Поделим $P(x)$ на $(x-1)$

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-2-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 \;\Big|\; x-1$$

$$-\; a_n x^n - a_n x^{n-1}$$

$$a_n x^{n-1} + (a_n + a_{n-1}) x^{n-2} + \dots + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2)$$

$$(a_n + a_{n-1}) x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2}$$

$$-\; (a_n + a_{n-1}) x^{n-1} + (a_n + a_{n-1}) x^{n-2}$$

$$(a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) x^{n-2}$$

это a_1

$$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1) x + a_0$$

$$-\; (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1) x - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1)$$

$$(a_n + \dots + a_0) = 0$$

~~$(x-1)(a_n x^{n-1} + (a_n + a_{n-1}) x^{n-2} + (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) x^{n-3} + \dots + (a_n + \dots + a_1)) = P(x)$. Действительно. Домножим вторую скобку на x, получаем: $a_n x^n + (a_n + a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_n + a_0)$~~

~~Вычитаем эту из скобки: $a_n x^n + (a_n + a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_n + a_0)$~~
~~$- a_n x^{n-1} + \dots +$~~

$$\boxed{a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0 \text{ по усл.}}$$

$$P(x) = (x-1)\left(a_n x^{n-1} + (a_n + a_{n-1}) x^{n-2} + \dots + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2) x + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1)\right)$$

Рассмотрим вторую скобку.

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА КЛАСС: 10

ШИФР: М-10-2-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Заметим, что сумма коэф-в опять равна 0.

Действительно: разобьём слагаемые на пары:

$a_n x^{n-1}$ с $(a_n + \ldots + a_1)$

$(a_n + a_{n-1})x^{n-2}$ с $(a_n + \ldots + a_2)x$

$(a_n + a_{n-1} + a_{n-2})x^{n-3}$ с $(a_n + \ldots + a_3)x^2$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$\boxed{\text{общ. вид пар после "отзерк-я" коэф-в: } (a_0 + \ldots + a_k)x^{n-k-1} \text{ с } (a_{k+1} + \ldots + a_n)x^k}$

Тогда сумма коэффициентов ~~при x~~ в каждой паре равна 0, исходя из условия, что $a_{n-k} = a_k$ $\Rightarrow$ в первом слагаемом из пары "отзеркалим" коэф-ты $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$ и т.д. и получим ~~сум~~ $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ по усл $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a_n x^{n-1} + \cancel{a} \; (a_n + a_{n-1})x^{n-2} + \ldots + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1)\right)$ кратно $(x-1)$ (т.к. если это равно $P'(x)$, ~~тогда~~ $P'(1) = 0 \Rightarrow 1$ - корень многочлена) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) \vdots (x-1)^2 \Rightarrow P(2022) \vdots 2021^2$. (ч.т.д.)

(и простым множ-м 2021 в квадрате)

~~Мы доказали, что P(2022) делится на квадр~~

~~(если) n - чёт~~ ~~то все слаг. разб-ся на парами, если n - нечётное,~~

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

ШИФР М-10-2-1

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Ремарка:

$\frac{\#}{3}$ Заметим, что если n – нечет, то сумма $A = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ разбивается на пары, т.к. кол-во слагаемых $(n+1)$ – четно $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n + \ldots + a_{\frac{n+1}{2}} = a_{\frac{n-1}{2}} + \ldots + a_0 = \frac{A}{2} = 0$.

Алгоритм с разбиванием на пары слагаемых многочлена многочлена (пред. стр.) однозначно работает при четном n.

При нечетном n без пары остается слагаемое $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{\frac{n+1}{2}}) x^{\frac{n-1}{2}}$, но заметим, что ранее мы доказали, что такой коэф-т $= 0 \Rightarrow$ сумма коэф-в многочлена $P'(x)$ $(P(x) = (x-1)P'(x)) \Rightarrow$ Противоречия нет,

$P(x) \vdots (x-1)^2 \Rightarrow P(2022) \vdots 2021^2 \Rightarrow P(2022) \vdots 43^2$
$P(2022) \vdots 47^2$

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 10

ШИФР М-10-2-2

ПРОТОКОЛ ПРОВЕРКИ

ТУР № 2

Заполняется членами жюри

Пометки участников не допускаются

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ИТОГО
критерии оценивания	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	
баллы						7	7	7	7		28
подписи членов жюри											

Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА **КЛАСС** 10

ШИФР М-10-2-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 10.6.

Три последовательных нечет. числа имеют вид
$2k+1$, $2k+3$ и $2k+5$. $(k \in \mathbb{Z})$

Пусть $2k+1 \equiv x \pmod{2022}$, где $0<x<2022$, ~~[illegible]~~
т.е. x – остаток первого числа от деления на 2022

(2022 – чет $\Rightarrow$ остаток от деления числа нечет на 2022 – нечет, т.е. $\underbrace{2k+1}_{\text{нечет}} = \underbrace{2022\cdot\mathbb{Z}}_{\text{чет}} + \underbrace{x}_{\text{нечет}} \Rightarrow 0<x<2022$) x – нечет

Тогда $2k+3 \equiv x+2 \pmod{2022}$
$2k+5 \equiv x+4 \pmod{2022}$

+ переход

Мог ~~прои~~ произойти "переход", если ~~остаток~~ ~~2k+1 число~~ x или $x+2 = 2021$. Тогда остаток последнего числа $x+4-2022$, остаток предпоследнего $(2k+3)$ числа также мог быть равен $x+2-2022$ (при $x=2021$)

Пусть кол-во чисел с такими переходными остатками – a $(0 \le a \le 2)$

Тогда сумма остатков от деления этих 3х чисел на 2022:

$$3x+6-2022a = 3(x+2-674a) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ сумма остатков всегда $\vdots\, 3$. Только одно простое число кратно 3 – это 3. Тогда $(x+2-674a)=1$, но этого быть ~~не~~ не может, т.к. $a=1$ при $x=2019 \Rightarrow x+2-674a = 2021-674 \neq 1$

$a=2$ при $x=2021 \Rightarrow x+2-674a = 2023-1348 \neq 1$.

В остальных случаях $a=0 \Rightarrow x+2 \neq 1$, т.к. $0<x<2021 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ нет, сумма остатков от деления 3х последовательных нечет чисел не может равняться простому числу.

Ответ: нет.

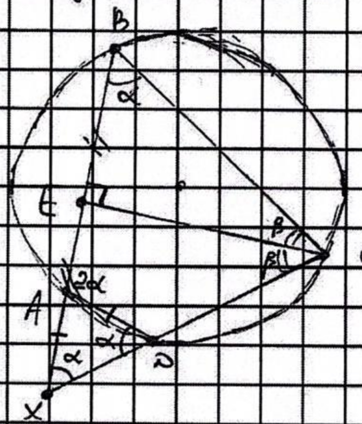
Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	КЛАСС	10
ШИФР	М-10-2-2		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Задача 10.~~7~~

Дано: $ABCD$ – вписан., $\angle A = 2\angle B$, CE – биссектриса $\angle C$, $E \in AB$
Доказать: $AD + AE = BE$
Доказательство:



$AB \cap CD = X$
Пусть $\angle B = \alpha \Rightarrow \angle A = 2\alpha$
Пусть $\angle C = 2\beta \Rightarrow \angle ECB = \angle XCE = \beta$ (CE – биссектриса)

$\angle A$ и $\angle C$ – противоположные углы вписанного 4^xуг-ка $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$ по св-ву впис. 4^xуг-ка
$\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

+

В $\triangle BEC$ $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta \Rightarrow \angle E = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$
$\angle BEC$ – прямой

$\triangle BCX$ – р/б, т.к. биссектриса CE является высотой $\Rightarrow$ CE – медиана,
(BX – осн) $BE = EX$, и также равны
углы при основании ~~$\angle E$~~ $\angle AXD = \angle B = \alpha$

+

В $\triangle AXD$ внешний угол при вершине $A = 2\alpha$, а внутр. $\angle X = \alpha$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle XDA = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow \triangle AXD$ – р/б, XD – осн-е $\Rightarrow$
$\Rightarrow AX = AD$

+

$BE = EX$, $EX = AE + AX$ и $AX = AD \Rightarrow BE = AD + AE$ (ч.т.д.)

+

Задача 10.8.

Любые три точки образуют треугольник $\Rightarrow$ никакие 3 точки не лежат на одной прямой.

Соединив все точки, мы получим выпуклый многоугольник с ~~...~~ (возможно) некоторым количеством точек внутри.

Очевидно, что мы получим многоугольник, т.к. никакие

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА КЛАСС 10

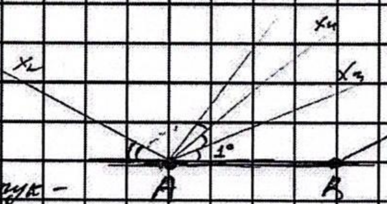
ШИФР М-10-2-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

3 точки не лежат на одной прямой. Он будет выпуклым,
есть
т.к. в противном случае ~~[illegible]~~ 2 точки,
лежащие по разные стороны от одной прямой, к-е не соединены,
хотя изначально мы соединили все точки без исключения –
противоречие ⇒ многоугольник действительно выпуклый).

Рассмотрим одну сторону этого многоугольника.
Назовём её AB, а все остальные точки $X_3, X_4, \dots, X_n$

Соединив все точки между собой,
мы соединили A с $n-1$ ~~вершиной~~
точкой (n – общее кол-во точек)



сторона
AB – ~~[illegible]~~ выпук-
~~[illegible] 3 точки обр~~ лого многоугольника,
а все отмеченные точки либо являются
его вершинами, либо лежат внутри ⇒ Все точки (кроме A и B,
принадлежащих прямой AB) находятся в одной полуплоскости,
т.е. по одну сторону от AB.

Любые 3 точки образуют треугольник, градусная мера
углов которых – N числа ⇒ каждый угол треугольника
хотя бы $1°$ ⇒ max угол $180° - 2° = 178°$ ⇒

⇒ в треугольнике ABX_i $\angle BAX_i$ max $178°$ ⇒ max возможное
кол-во точек, с которыми соединена A – 179, включая точку
B. (Рассмотрим X_j такое, что угол BAX_j наибольший из углов
вида BAX_i $\angle BAX_j$ max $178°$. Внутри него max 177 лучей,
т.к. они должны отсекать обязательно целое кол-во градусов).

⇓

$n_{max} = 180$.

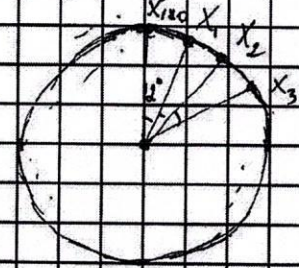
+

Всероссийская олимпиада школьников — Региональный этап

ПРЕДМЕТ	МАТЕМАТИКА	**КЛАСС**	10
ШИФР	М-10-2-2		

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.

Пример такой конфигурации точек:



180 точек лежат на окружности.
(перенумеруем их в $X_1, X_2, \dots, X_{180}$)

Любая дуга $X_k X_{k+1}$ $(1 \le k < 180,\ k \in \mathbb{Z})$
и дуга $X_1 X_{180} = 2°$

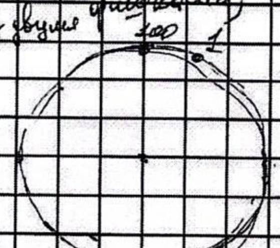
Многоугольник $X_1 X_2 \dots X_{180}$ — правильный 180-угольник

Тогда любой $\triangle$-к из трёх отмеченных точек вписан в эту окружность, а любой центральный угол будет $= 2° \cdot a$ $(a \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ любой вписанный угол $= a°$ — усл-е выполняется.

Ответ: 180.

Задача 10.9.

(возможное требуемое)
Наибольшее $k = 100 - 1 = 99$ (max В между двумя фишками) (необходимо для того, чтобы поменять 1 и 100 местами)



Для меньшего k необходимо избежать взаимодействия фишек №1 и №100, т.е их прямой перестановки.

Заметим, что чтобы фишке №100 прийти на позицию 1, а фишке №1 на позицию 2, при этом не взаимодействуя, им нужно прийти с одной стороны.

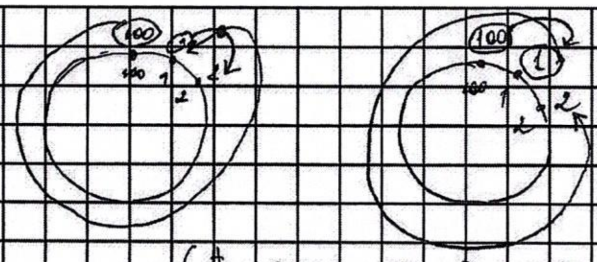
Иначе им придётся пересечься, т.е поменяться местами $\Rightarrow \min k = 99$:

Всероссийская олимпиада школьников Региональный этап

ПРЕДМЕТ | | КЛАСС | |

ШИФР М-10-2-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.



(Конечно, что внутри этого пути могут быть колебания, но в целом им придется пересечься при таком пути, т.к. либо №100 пройдет через все позиции от 100 до 1, либо №1 пройдет через все позиции от 1 до 2 (в обр. порядке 1-100-99-...-2)

Поэтому для достижения меньшего k их пути не пересекаются и они приходят с "одной стороны" на нужные позиции

Получается, в какой-то момент м/ду этими двумя фишками встанет какая-то другая №X (она не может не появиться, т.к. для передвижения обязательно меняться с соседними фишками местами, а 100 и 1 меняться не могут для достижения $k < 99$).

~~Рассмотрим момент, когда фишка №1 или №100 первый раз меняется с какой-то другой (до этого момента они не менялись ни с кем, стояли на своих местах). Теперь м/ду ними стоит фишка №X.~~

Докажем, что есть фишка, которая должна взаимодейство-вать и с №1 и с №100.

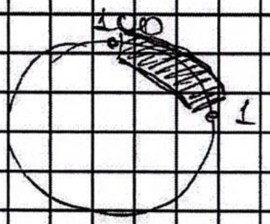
Фишки, с которыми взаимодействуют №1 и №100 будут вставать между ними (путь между ними - это расстояние от №100 до №1 по часовой стрелке. Именно он должен сокращаться, иначе пути этих 2х фишек пересекутся (см. выше)).

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА — КЛАСС: 10

ШИФР: М-10-2-2

Пишите аккуратно и разборчиво. Не забудьте указать номер задания, которое вы выполняете.
Условия заданий переписывать не нужно. Выполнив задания, пронумеруйте все страницы.



В закрашенном поле как раз фишки находящиеся м/ду №100 и №1, на их "расстоянии", к-е нужно сократить.

~~1. Допустим, что нет фишки, к-е поменяется и с №1 и с №100.~~

Нет фишки, которая меняемся с №1, если не поменяются с №100, то могут уйдут из закрашенного поля через фишку №1, вернув №1 на исходную позицию.

Аналогично с теми фишками, которые пришли в закрашенное поле через №100 – через №100 они и уйдут, вернув №100 на исходную позицию ⇒

⇒ не меняя фишки которая поменяется – с №1 и с №100 нельзя переместить эти фишки на нужные позиции.

Значит, такая фишка есть.

Пусть это фишка с №x. Тогда $100 - x = k_1$ и $x - 1 = k_2$, $k_1 + k_2 = 99$ $\max(k_1, k_2) = k$ искомое. k_1 и k_2 = 49 и 50 ⇒

⇒ $k = 50$. (минимально возможное k для осуществления требуемого сдвига)

Ответ: 50.

(+) Пример перестановки: Пусть фишка №50 обойдёт против часовой стрелки все фишки, т. е. поменяется со всеми фишками местами в следующем порядке: 49-48-...-1-100-99-...-51. Так она циклически сдвинет все фишки №k на позиции $k+1 \pmod{101}$ и сама придёт на позицию №51.