

**11 класс**

**Второй день**

11.6. Последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$  такова, что  $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$  для любых  $n$  и  $k$  таких, что  $1 \leq n \leq 2022$  и  $1 \leq k \leq 2022$ . При этом  $a_{1011} = 0$ . Какие значения может принимать  $a_{2022}$ ?

11.7. Произведение цифр натурального числа  $n$  равно  $x$ , а произведение цифр числа  $n+1$  равно  $y$ . Может ли случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа  $m$  равно  $y-1$ , а произведение цифр числа  $m+1$  равно  $x-1$ ?

11.8. Имеется 100 фишек, на которых нанесены номера  $1, 2, \dots, 100$ . Фишки поместили в вершинах правильного 100-угольника так, что они оказались упорядочены в порядке возрастания при обходе вершин по часовой стрелке. За ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, расположенные в соседних вершинах, при том условии, что номера этих фишек отличаются не более чем на  $k$ . При каком наименьшем  $k$  серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

11.9. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана в окружность  $\omega$ . Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $M$  – середина отрезка  $AB$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AD$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $K$  и  $L$ . Точка  $N$  – середина дуги  $CD$  описанной окружности треугольника  $PCD$ , не содержащей точку  $P$ . Доказать, что точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на одной окружности.

11.10. Даны неотрицательные числа  $a, b, c, d$  такие, что  $a + b + c + d = 8$ . Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2 + b + c} + \frac{b^3}{b^2 + c + d} + \frac{c^3}{c^2 + d + a} + \frac{d^3}{d^2 + a + b} \geq 4.$$