

11 класс

Первый день

11.1. Однажды на перемене Илья записал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из десяти написанных чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

11.2. Задан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что найдутся попарно различные числа a , b и c такие, что верны равенства

$$P(b+c) = P(a), P(c+a) = P(b), P(a+b) = P(c).$$

11.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120^\circ$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD .

11.4. В компании "Служба 101" некоторые пары людей дружат (если A дружит с B , то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

11.5. Пусть S — множество, которое состоит из 100 натуральных чисел. Все элементы множества не превосходят 10000. Отметим в пространстве все точки, у которых все координаты принадлежат множеству S . К каждой из 1000000 отмеченных точек (x, y, z) прикреплён стикер с написанным на нём числом $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$. На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?