

Задания для обучающихся**Время выполнения – 235 минут****Максимальное количество баллов – 42***Написать только ответ — мало!**Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!*

1. 2022 рыцаря и лжеца выстроились в ряд, причем крайние слева и справа – лжецы. Все, кроме крайних, высказали утверждение: “Справа от меня лжецов в 42 раза больше, чем слева”. Приведите пример ряда, в котором стоит ровно один рыцарь.
2. Докажите, что $4 \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$ для всех x .
3. Почтальон Печкин едет по шоссе на велосипеде. Он заметил, что через каждые 4,5 километра его обгоняет дачный автобус, а через каждые 9 минут проезжает встречный дачный автобус. Интервал движения автобусов в обоих направлениях равен 12 минутам. С какой скоростью едет Печкин?
4. Докажите, что если $n > 4$ и $(n - 1)!$ не делится на n , то n – простое число (число $n!$ равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n).
5. ABCD – равнобедренная трапеция, угол ABD равен 90° . На большем основании AD, как на диаметре, построена окружность Ω . Равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) вписан в окружность Ω , причем $KL \parallel AB$ и $LM \parallel CD$. Докажите, что площади треугольника KLM и трапеции ABCD равны.
6. На столе лежит 2021 кучка орехов, сначала в каждой кучке по одному ореху. Петя и Вася играют в следующую игру (первым ходит Петя). Каждым ходом можно объединить три кучки, в которых поровну орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, и как ему играть?