

Задания для обучающихся

Время выполнения – 235 минут
Максимальное количество баллов – 42

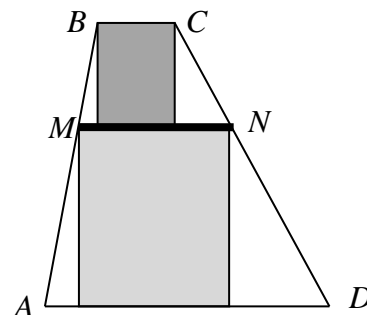
Написать только ответ — мало!

Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!

1. Даны две обыкновенные дроби с положительными числителями и знаменателями. У первой дроби числитель на 5 меньше знаменателя, у второй дроби числитель на 2021 меньше знаменателя. Может ли у их суммы числитель быть больше знаменателя? Обоснуйте свой ответ.

2. В трёх сосудах налито зелье. Известно, что в каждом сосуде целое число литров, отличное от нуля. После того, как из первого сосуда отлили 10% имевшегося в нём зелья, из второго – 20%, а из третьего – 30%, общее количество зелья уменьшилось на 25%. Докажите, что в третьем сосуде было не менее 4 литров зелья.

3. Отрезок MN разделил трапецию $ABCD$ на две трапеции так, что $\frac{MB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{CN}{ND} = \frac{MN}{AD}$. Известно, что площади закрашенных прямоугольников равны 1 и 4 соответственно. Найдите площадь трапеции $ABCD$.



4. У Маши было несколько синих и несколько зелёных карточек. Всего 100 штук. На первой она написала 1, на второй – 2, на третьей – 3, ..., на 100-й – 100. Перебирая карточки, Маша заметила, что если сложить два числа, записанных на карточках разного цвета, и результат не превосходит 100, то он записан на синей карточке. А если перемножить два числа, записанных на карточках разного цвета, то результат записан на зелёной. Число 6 записано на зелёной карточке. На карточке какого цвета записано число 30?
5. Дан прямоугольный треугольник ABC , CD – его высота, опущенная на гипотенузу AB . Точки K и L выбраны на гипотенузе так, что CK – биссектриса угла ACD , CL – биссектриса угла BCD . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника KCL .
6. В натуральном ряду выбрали 2021 последовательное число так, что среди выбранных чисел имеется ровно 30 точных квадратов. Сколькими способами это можно сделать?