



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

*Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить
с помощью рассуждений или вычислений!*

1. Числитель и знаменатель дроби — целые числа. К числителю прибавили 2, а к знаменателю прибавили 3, в результате чего дробь увеличилась в 4 раза. Обе дроби (исходная и полученная) существуют. Приведите хотя бы один пример такой дроби. Не забудьте показать, что Ваш пример удовлетворяет условию.
2. В школе учатся 40% мальчиков и 60% девочек. Когда заболели 30% от всех учеников, то школу закрыли на карантин. Известно, что 40% заболевших — это девочки. Кого больше — здоровых мальчиков или заболевших девочек, и какую часть разница между этими количествами составляет от общего количества учеников в школе?
3. В прямоугольнике $ABCD$ известны стороны $AB=10$ и $BC=12$. На плоскости отмечена точка E такая, что известны длины $DE = 8$ и $CE = 2\sqrt{21}$. Найдите AE .
4. Назовем квадратный трехчлен *стандартным*, если его старший коэффициент равен 1. Графики двух различных стандартных квадратных трехчленов касаются оси абсцисс в точках A и B , а пересекаются в точке C . Найдите площадь треугольника ABC , если $AB=4$.
5. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, касающаяся сторон AB , BC , CD и DA в точках K , L , M и N соответственно. Прямые KN и ML пересекают прямую BC в точках E и F соответственно, причем $BE=BL$. Докажите, что $CL=CF$.
6. В квадрате 9×9 отмечено 40 клеток. Ряд (строка или столбец) называется *хорошим*, если в нем отмеченных клеток больше, чем неотмеченных. Какое наибольшее количество хороших рядов может быть в этом квадрате?

Время работы 3 часа 30 минут



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

1. **Ответ.** Например, годится $1/(-12)$ или $2/(-6)$ – это все решения.

Критерии проверки. Любой верный пример с проверкой – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. **Ответ.** Здоровых мальчиков больше на $1/10$ от общего количества учеников.

Решение. Пусть всего в школе учатся A учеников. Тогда $0,4A$ – это мальчики, $0,6A$ – это девочки, $0,3A$ – все заболевшие дети, $0,12A$ – заболевшие девочки, $0,18A$ – заболевшие мальчики, $0,22A$ – здоровые мальчики. Следовательно, здоровых мальчиков больше на $0,1A$.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Верное и обоснованное сравнение, но не посчитана часть от общего количества учеников – **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

3. **Ответ.** $AE=4\sqrt{7}$ или $AE=4\sqrt{19}$.

Решение. Имеется два случая расположения точки E – внутри прямоугольника и вне него. По теореме косинусов $\angle CDE=30^\circ$. Опустим из точки E перпендикуляр EH на прямую AD . В треугольнике EDH имеем $\angle HED=30^\circ$, $DH=4$, $EH=4\sqrt{3}$. Тогда $AH=8$ или $AH=16$, следовательно, $AE=4\sqrt{7}$ или $AE=4\sqrt{19}$.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Полностью разобран один из случаев расположения точки E – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

4. **Ответ.** 8.

Решение. Стандартный квадратный трехчлен имеет вид $(x-a)^2$. Рассмотрим квадратичные функции $y=(x-a)^2$ и $y=(x-b)^2$. Найдем точку пересечения графиков: $x=(a+b)/2$, $y=((a-b)/2)^2$. По условию $AB=4$, кроме того, $AB=a-b$ (или $b-a$), следовательно, $y=4$, что также является высотой в треугольнике ABC , проведенной из точки C . Таким образом, высота и основание этого треугольника равны 4, то есть площадь равна 8.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. В общем виде найдена точка пересечения графиков, но дальнейших продвижений нет – **2 балла**. В остальных случаях (в том числе за «полное» решение на примерах) – **0 баллов**.

5. **Решение.** Так как $BK=BL=BE$, то KLE – прямоугольный треугольник с прямым углом K . Значит угол LKN тоже прямой. Поскольку $KLMN$ – вписанный четырехугольник, то угол LMN также является прямым и, следовательно, угол LMF – прямой.

Рассмотрим окружность с центром в точке C радиусом $CM=CL$. Пусть она вторично пересекает прямую BC в точке F_1 , тогда $CM=CL=CF_1$. Значит в треугольнике LMF_1



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

угол M – прямой. Но, это означает, что точки F и F_1 совпадают. Следовательно, $CL=CF$.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Доказано, что треугольник LMF прямоугольный, но равенство нужных отрезков не обосновано – **3 балла**. Решение неверно – **0 баллов**.

6. Ответ. 16.

Решение. Оценка на 16 рядов. Если рядов хотя бы 17, то хотя бы 9 из них одного вида (строки или столбцы). В этих 9 рядах все отмеченные клетки различны, значит их не менее чем 45 (минимальное количество отмеченных клеток для «хорошести» ряда – 5). Противоречие.

Пример показан на рисунке.

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Только оценка или только пример – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

1	1	1	1				1	
1	1	1	1			1		
1	1	1	1		1			
1	1	1	1	1				
			1	1	1	1	1	
		1		1	1	1	1	
	1			1	1	1	1	
1				1	1	1	1	