



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить

с помощью рассуждений или вычислений!

1. Придумайте три числа x , y и z , **не** являющиеся целыми так, чтобы все числа: xy , yz , xz и xyz были целыми.
2. На экране компьютера выведено число 27. Каждую секунду имеющееся число заменяется произведением его цифр, увеличенным на 12. Например, через 1 секунду на экране будет число $2 \cdot 7 + 12 = 26$. Какое число появится на экране ровно через минуту?
3. Про коэффициенты линейной функции $y = kx + b$ известно, что $k + b > 0$, а $2k + b < 0$. Может ли график этой функции пересекать ось абсцисс в точке $x = 3$? Ответ обоснуйте.
4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что $AB = BD$. Пусть точка M — середина боковой стороны CD , а O — точка пересечения отрезков AC и BM . Докажите, что треугольник BOC — равнобедренный.
5. Известно, что все градусные меры углов выпуклого многоугольника равны либо 172° , либо 173° . Какое наибольшее количество сторон может иметь такой многоугольник?
6. Петя загадал натуральное число от 1 до 2019. Вася хочет его отгадать, называя натуральные числа. Если названное число меньше загаданного, то Петя говорит «мало». Если названное Васей число больше загаданного, то Петя говорит «много». Если названное число совпадает с загаданным, то Петя честно говорит «угадал», и игра заканчивается победой Васи. Но если в процессе отгадывания дважды возник ответ «много», то игра заканчивается победой Пети. Сможет ли Вася гарантированно выиграть, назвав не более 100 чисел?

Время работы 3 часа 30 минут



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

1. **Решение.** Годаются, например, такие числа: $x = \frac{p_1 p_2}{p_3}$, $y = \frac{p_2 p_3}{p_1}$, $z = \frac{p_3 p_1}{p_2}$, где p_i -

различные простые числа. Каждое из чисел не является целым, а все указанные произведения будут целыми.

Критерии проверки. Любой верный пример (или описание) чисел с проверкой или пояснением, что условие задачи выполняется – **7 баллов**. Верный пример без проверки произведений – **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

2. **Ответ. 14. Решение.** Выпишем несколько первых операций, выполняемых компьютером: 27 , $2 \cdot 7 + 12 = 26$, $2 \cdot 6 + 12 = 24$, $2 \cdot 4 + 12 = 20$, $2 \cdot 0 + 12 = 12$, $1 \cdot 2 + 12 = 14$, $1 \cdot 4 + 12 = 16$, $1 \cdot 6 + 12 = 18$, $1 \cdot 8 + 12 = 20$. Число 20 повторилось, значит дальше будет повторяться цикл из пяти чисел: 20, 12, 14, 16, 18. Если мы повторим 12 таких циклов, то 63-им числом в ряду будет число 18. Но нас интересует число, которое появится после 60 операций, т.е. 61-ое. Это число 14.

Критерии проверки. Приведены верные рассуждения, получен правильный ответ – **7 баллов**. Установлена верная закономерность, но в ответе ошибочно указано 60-ое число – **6 баллов**. Закономерность появления чисел выявлена, но дальнейшие продвижения отсутствуют – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

3. **Ответ.** Нет, не может. **Решение 1.** По условию $k + b = y(1) > 0$, а

$2k + b = y(2) < 0$, значит график пересекает ось абсцисс в точке $x \in (1; 2)$, т.е. не может пересекать её в точке $x = 3$. **Решение 2.** Пусть график этой функции пересекает ось абсцисс в точке $x = 3$, тогда выполняется равенство $3k + b = 0$. Выразим $b = -3k$ и подставим в каждое неравенство: $k + b = k - 3k = -2k > 0$ и $2k + b = 2k - 3k = -k < 0$. Получили противоречие.

Критерии проверки. Ответ обоснован – **7 баллов**. Установлено, что $k + b = y(1)$ и $2k + b = y(2)$, но дальнейших продвижений нет – **2 балла**. Верный ответ без обоснования – **0 баллов**.

4. **Решение.** Продлим прямую BM до пересечения с прямой AD в точке E . Тогда треугольники BCM и DEM будут равны по стороне ($CM = MD$) и двум прилежащим к ней углам, а значит $BC = DE$. Четырёхугольник $BCED$ – параллелограмм, так как две его стороны BC и DE равны и параллельны. Значит четырёхугольник $ABCE$ – равнобедренная трапеция. Диагонали BE и CA наклонены к основанию BC под равными углами, тогда $BO = OC$.



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

Критерии проверки. Верное решение – **7 баллов**. Все шаги верные, но недостаточно обоснованные – **5 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

5. **Ответ.** 51. **Решение.** Пусть x – количество углов с градусной мерой 172° , y – количество углов с градусной мерой 173° . Найдем сумму всех углов многоугольника, она равна $172x + 173y$. С другой стороны, сумма всех углов выпуклого n -угольника равна $180(n - 2) = 180(x + y - 2)$. Имеем равенство $172x + 173y = 180(x + y - 2)$, откуда $8x + 7y = 360$. Перепишем последнее равенство в виде $7(x + y) + x = 360$. Число $x + y$ будет максимальным, если x минимально. Но при $x = 0, 1, 2$ число $x + y$ не будет целым. Наименьшее подходящее $x = 3$, тогда $x + y = 51$.

Критерии проверки. Получен правильный обоснованный ответ – **7 баллов**. Верный ответ с проверкой – **2 балла**. Введены переменные, составлено равенство, эквивалентное $172x + 173y = 180(x + y - 2)$, но дальнейших продвижений нет – **2 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

6. **Ответ.** Да, сможет.

Решение. Идея: нужно представить число 2019 (или близкое к нему) в виде произведения двух множителей $2019 = x \cdot y$ так, чтобы $x + y < 100$. Тогда мы разобьем ряд натуральных чисел от 1 до 2019 на равные промежутки. Сначала найдем промежуток, внутри которого находится загаданное Петей число, а потом шаг за шагом найдем само число. Воспользуемся тем, что $2016 = 32 \cdot 63$, получим промежутки: от 1 до 32, от 33 до 64, ..., от 1085 до 2016, и, наконец, от 2017 до 2019. Пусть Вася последовательно называет числа: 32, 64, 96, ..., 2016, пока Петя не скажет «много». Тем самым Вася израсходует не более 63 попыток. Если Петя всё время говорил «мало», то загаданное им число содержится среди чисел 2017, 2018, 2019, и Вася отгадает его за три попытки, последовательно называя эти числа. В тот момент, когда Петя ответил «много», Вася знает, в каком промежутке, состоящем из 32 чисел, содержится загаданное Петей число. Он найдет его, называя последовательно числа из этого промежутка, начиная с самого маленького. На это у него уйдет не более 31 попытки. $63 + 31 < 100$, поэтому Вася отгадает число, назвав меньше 100 чисел.

Критерии проверки. Полностью описан алгоритм, с помощью которого Вася отгадает Петино число меньше, чем за 100 вопросов – **7 баллов**. Описана идея разбиения числовой прямой на промежутки так, чтобы суммарного количества



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
9 КЛАСС

попыток хватило, чтобы установить промежуток и число внутри него, но явного алгоритма нет – **2 балла**. Алгоритм работает только для частных случаев – **0 баллов**.