



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Написать только ответ — мало! Все ответы нужно объяснить

с помощью рассуждений или вычислений!

1. Постройте квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ такой, что сумма всех его коэффициентов равна одному из его корней, а произведение всех коэффициентов равно другому его корню.

2. Дана последовательность: $\cos 3^\circ, \cos 30^\circ, \cos 300^\circ, \cos 3000^\circ, \dots$. В ней ровно 100 членов. Какой знак имеет произведение этих 100 чисел?

3. В банке был налит 100% сок. Хулиган Петя в течение одного дня выпил 1 л сока, а вечером долил в банку 1 л воды и все перемешал. Во второй и в третий дни он сделал то же самое. После этого выяснилось, что содержимое сока в банке уменьшилось в 8 раз. Сколько литров сока выпил Петя за три дня?

4. Дана дробно-линейная функция $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, не являющаяся постоянной.

Известно, что $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ для всех x , для которых обе части равенства определены.

Найдите значение $f(3)$, если $f(2) = 0$.

5. ABCDE — выпуклый пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1. Прямые BC и AE параллельны, $CD = DE$, $BE = AE$. Найдите длину самой большой диагонали этого пятиугольника.

6. В летнюю школу приехало 120 школьников, причем какие-то дети были знакомы друг с другом, а какие-то нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить в две трехместные комнаты так, чтобы в каждой комнате оказались только знакомые между собой дети. Какое наименьшее количество пар знакомых между собой школьников могло приехать в школу?

Время работы 3 часа 30 минут



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

1. **Решение:** Годится трехчлен $-2x^2 + 4x$, произведение коэффициентов равно 0, а сумма 2.

Критерии проверки: Приведен подходящий трехчлен с проверкой – **7 баллов**, только ответ без проверки – **2 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. **Ответ:** минус.

Решение: Очевидно, что первые три члена – положительные. Далее, $\cos 3000^\circ = \cos(8 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ < 0$. Покажем, что все остальные члены последовательности равны четвертому члену. Заметим, что при любом натуральном $k \geq 3$ число $3 \cdot 10^{k+1} - 3 \cdot 10^k = 3 \cdot 10^k (10 - 1) = 27 \cdot 10^k$ кратно 360, следовательно, $\cos(3 \cdot 10^{k+1}) = \cos(3 \cdot 10^k) = \cos 120^\circ$. Таким образом, в данной последовательности имеется три положительных члена и 97 отрицательных.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

3. **Ответ:** 1,75 литра.

Решение: Пусть объем сосуда равен x литров. Тогда после первого дня в сосуде останется $x - 1$ литров сока. После второго дня объем сока станет равен $x - 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$. После третьего дня – $\frac{(x-1)^3}{x^2}$. Согласно условию,

получаем уравнение $\frac{(x-1)^3}{x^2} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow x^3 = 8(x-1)^3$. Откуда находим объем

сосуда $x = 2$ литра. Значит, в сосуде осталось 0,25 литра, то есть выпито 1,75 литра.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, правильно составлено уравнение, но ответ неверный из-за вычислительной ошибки – **5 баллов**, правильно составлено уравнение, но решение не закончено – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

4. **Ответ:** 0,2 или – 0,2.

Решение: Пусть $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, тогда $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a/x+b}{c/x+d} = \frac{cx+d}{ax+b}$. Далее будем

считать, что x принимает произвольные значения, кроме $-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}, 0$. Тогда

последнее равенство перепишем в виде $\frac{a+bx}{c+dx} = \frac{cx+d}{ax+b}$. Оно равносильно



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

равенству $a^2x + ab + abx^2 + b^2x = c^2x + cd + cdx^2 + d^2x$. После переноса в одну часть равенства и группировки слагаемых, получим

$$(ab - cd)x^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)x + ab - cd = 0.$$

Так как данное равенство должно выполняться при любых значениях x , значит, все коэффициенты этого квадратного трехчлена равны нулю.

Кроме того, известно, что $f(2) = \frac{2a+b}{2c+d} = 0$ и $f\left(\frac{1}{1/2}\right) = \frac{c/2+d}{a/2+b} = \frac{c+2d}{a+2b} = 0$.

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} ab - cd = 0, \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \\ 2a + b = 0, \\ c + 2d = 0. \end{cases}$$

Из равенств 1, 2 и 4 следует $-2a^2 + 2d^2 = 0$, т.е. $a^2 = d^2$ и возможны два варианта $a = d$ и $a = -d$.

Заметим, что любой набор чисел вида $(t, -2t, -2t, t)$ или $(t, -2t, 2t, -t)$, где t – произвольное число, является решением данной системы, значит, система разрешима.

Теперь найдем $f(3) = \frac{3a+b}{3c+d} = \frac{3a-2a}{-6d+d} = \frac{a}{-5d}$. Получаем два возможных значения: 0,2 и -0,2.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, при в целом правильном решении пропущен один из случаев – **5 баллов**, получена система уравнений, из которой можно найти нужные отношения коэффициентов, но дальнейших продвижений нет – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

5. **Ответ:** 2.

Решение: 1) Очевидно, что точка D – середина дуги CE . Пусть $\angle ECD = \angle CED = \alpha$, тогда $\angle EBC = \angle AEB = 2\alpha$. Пусть $\angle ABE = \angle BAE = \beta$, тогда в треугольнике ABE $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, т.е. $\alpha + \beta = 90^\circ$.

2) Дуга AED равна сумме дуг AE и ED и равна $2\angle ABE + 2\angle ECD = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Значит, AD – диаметр окружности. Следовательно, это и есть самая длинная диагональ.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в противном случае (в том числе при рассмотрении частных случаев пятиугольника) – **0 баллов**.

6. **Ответ:** 7020.

Решение: 1) Заметим, что у каждого школьника есть не более трех незнакомых (в противном случае найдется шестеро школьников, которых невозможно будет расселить в две трехместные комнаты, в которых находятся только знакомые между собой дети). Если у каждого не более двух



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019/20 гг.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

незнакомых ему школьников, то каждый знаком минимум с 117 и всего пар знакомых не меньше, чем $\frac{120 \cdot 117}{2} = 7020$.

2) Допустим нашелся школьник А, у которого есть трое незнакомых: V_1 , V_2 и V_3 . Рассмотрим группу из шести человек: А, V_1 , V_2 , V_3 , С, D, где С и D – два произвольных школьника. Тогда, после их расселения, А, С и D окажутся в одной комнате, а значит С и D знакомы между собой и с А. Следовательно, любые два школьника, отличные от V_1 , V_2 и V_3 , знакомы между собой. Но, каждый из V_1 , V_2 , V_3 не знаком максимум с тремя школьниками. Таким образом, пар незнакомых детей не более 9. В этом случае число пар знакомых школьников не меньше, чем $\frac{120 \cdot 119}{2} - 9 = 7131 > 7020$.

3) Осталось показать, что 7020 пар знакомых быть могло. Приведем пример. Рассадим всех школьников по кругу и «познакомим» всех, кроме сидящих рядом. Легко проверить, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи, и количество пар знакомых окажется равным $\frac{120 \cdot 117}{2} = 7020$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, доказано, что наименьшее число равно 7020 – **3 балла**, приведен пример 7020 знакомых пар – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.